R. Guidorzi

INTRODUZIONE AI MODELLI NELLO SPAZIO DEGLI STATI

Indice

Capitolo 1 - Introduzione

Capitolo 2 – Stabilità dei sistemi dinamici

Capitolo 3 – I sistemi lineari

Capitolo 4 – I modelli ingresso/uscita dei sistemi lineari

1

Introduzione

Questo primo capitolo, dopo una introduzione del concetto di sistema e di modello, fornisce una classificazione dei sistemi ed una descrizione di alcune classi di modelli matematici. Vengono inoltre definite l'equivalenza tra stati e tra sistemi, la risposta, il moto, le uscite e gli stati di equilibrio.

1.1 I SISTEMI

Il termine sistema, dal greco $\sigma\upsilon\sigma\tau\eta\mu\alpha$, denota nel linguaggio comune l'insieme di più parti tra le quali esiste qualche forma di interazione, quale scambio di informazione, energia, materia, ecc. Una definizione di questo tipo risulta molto generale potendo includere, in pratica, qualunque aspetto della realtà; non implica infatti neppure che le parti di un sistema possiedano una natura fisica ben definita e può, ad esempio, essere considerato come un sistema anche l'insieme delle istruzioni che compongono un programma per computer. Nel seguito il termine sistema verrà utilizzato per indicare una entità, formata o meno da più parti, la cui interazione con l'ambiente circostante possa essere soggetta a misura.

In genere l'interazione tra un sistema (fisico o meno) e l'ambiente che lo circonda (esso pure fisico o astratto) viene descritta in termini di *cause* ed *effetti*. L'azione dell'ambiente sul sistema viene cioè considerata come causa mentre la risposta del sistema a tale azione viene considerata come effetto. Le variabili che descrivono l'azione dell'ambiente vengono indicate con il nome di *ingressi* o, globalmente, con il nome di *ingresso*, quelle che descrivono la risposta del sistema con il nome di *uscite* o, globalmente, con il nome di *uscita*. Quando l'interazione di un sistema con l'ambiente circostante viene descritto in termini di ingressi ed uscite, il sistema viene detto *orientato*. La rappresentazione usualmente adottata è quella di Figura 1.1 ove u indica l'ingresso e y l'uscita.

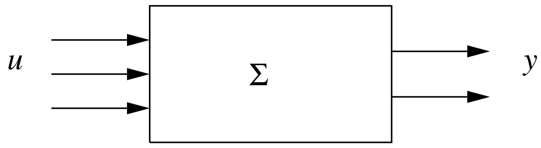

Figura 1.1 – Rappresentazione di un sistema orientato

Osservazione 1.1

La partizione degli attributi misurabili in ingressi ed uscite non è sempre univocamente deducibile dalla descrizione del sistema, essendo legata all'azione dell'ambien-te circostante sul sistema stesso. Si consideri, ad esempio, un tratto di condotta attraversato da un fluido.

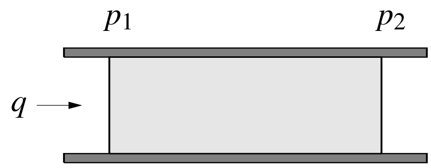

Figura 1.2 – Elemento di condotta attraversato da un fluido

Gli attributi misurabili, considerando uniforme la temperatura all'interno della condotta ed il fluido non comprimibile, possono venire limitati alla portata di fluido, q, ed alle pressioni, p_1 e p_2, nelle due sezioni. Si supponga inoltre di conoscere la funzione non lineare

$$f(q, \Delta p) = 0 \tag{1.1.1}$$

che lega q alla differenza di pressione $\Delta p = p_2 - p_1$. Pur disponendo di una descrizione completa del sistema, restano possibili orientamenti diversi legati alla modalità di interazione del sistema con l'ambiente circostante. Se, ad esempio, la condotta è collegata ad un serbatoio il cui livello venga mantenuto costante e scarica il fluido nell'ambiente, Δp potrà venire assunta come ingresso e q come uscita. Qualora invece il dispositivo cui è collegata la condotta imponga la portata, q assumerà il ruolo di ingresso e Δp quello di uscita. Qualora l'ambiente circostante non imponga né la portata né la differenza di pressione (ad esempio quando il sistema in esame sia un tratto di una più lunga condotta), si potrà adottare, indifferentemente un orientamento o l'altro.

A volte gli ingressi di un sistema vengono ulteriormente suddivisi in due classi, quella degli ingressi sui quali è possibile agire per ottenere il comportamento desiderato del sistema, detti ingressi o variabili manipolabili, e quelli sui quali non è possibile agire, detti ingressi non manipolabili o disturbi. La corrispondente rappresentazione è quella di Figura 1.3 ove i disturbi sono indicati con il simbolo d.

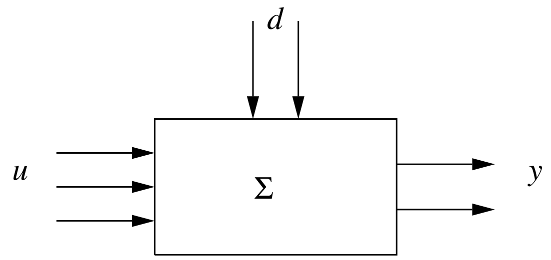

Figura 1.3 – Rappresentazione di un sistema con disturbi

1.2 I MODELLI MATEMATICI E LA TEORIA DEI SISTEMI

L'etimo di modello risale alle parole latine *modus* e *modulus*, entrambe con il significato di misura. Tali radici ben si adattano all'uso che viene fatto del termine modello nell'ambito dell'ingegneria e delle scienze esatte ove i modelli hanno essenzialmente lo scopo di descrivere quantitativamente le relazioni che sussistono tra gli attributi misurabili dei sistemi dinamici.

L'uso iniziale dei modelli nella scienza e nella tecnologia faceva riferimento a rappresentazioni in scala, utilizzate dai progettisti per valutare l'aspetto di opere prima della loro realizzazione. Uno sviluppo importante fu acquisito con l'introduzio-ne di modelli ancora costituiti da riproduzioni in scala di sistemi fisici non più con finalità estetiche ma per studiarne il comportamento, prima della costruzione, in condizioni operative difficilmente realizzabili o molto onerose. Esempi ben noti di modelli di questo tipo sono, nel settore dell'ingegneria navale, i modelli degli scafi utilizzati per valutarne le caratteristiche idrodinamiche (resistenza all'avanzamento). Si osservi come in tale caso lo studio quantitativo di un fenomeno molto complesso venga effettuato con mezzi molto semplici (dinamometro e flusso di acqua a velocità controllata) senza che risulti necessaria alcuna conoscenza delle relazioni matematiche che legano le variabili in gioco (flussi, profili di velocità, velocità dello scafo ecc.). È tuttavia necessario, per ottenere risultati corretti, effettuare una messa in scala adeguata di tutte le grandezze in gioco; i flussi laminari, ad esempio, non devono diventare turbolenti e viceversa.

Un ulteriore avanzamento è legato alla riproduzione del comportamento di un sistema su un altro sistema di più agevole realizzazione e studio sfruttando l'eguaglianza delle relazioni formali che descrivono leggi fisiche diverse. Un tipico esempio è costituito dai calcolatori analogici formati da reti elettriche che opportunamente interconnesse (programmazione) riproducono il comportamento di sistemi di natura diversa (meccanici, idraulici, economici ecc.) meno adatti a sperimentazioni dirette. Modelli di questo tipo potrebbero venire definiti come analogici o, per evitare confusioni con l'uso di questo termine per indicare grandezze che variano con continuità (in contrapposizione a "digitale" usato per indicare grandezze discretizzate), modelli basati sulle leggi dell'analogia.

I modelli basati sulle leggi dell'analogia offrono una maggiore flessibilità rispetto alla categoria precedente ove l'unico grado di libertà era il fattore di scala; diventa infatti possibile scegliere anche la natura fisica del modello. È tuttavia necessario conoscere le leggi che descrivono il comportamento del sistema da studiare poiché si deve selezionare, costruire e configurare un diverso sistema governato da leggi analoghe e studiarne il comportamento a partire da opportune condizioni iniziali. Non è invece richiesta la capacità di costruire un modello matematico completo e di utilizzarlo per determinare il comportamento del sistema.

L'ultimo gradino nella evoluzione dei modelli porta all'uso di modelli astratti cioè matematici, che descrivono i legamiche il sistema impone ai valori assunti dai relativi attributi misurabili. L'attuale ruolo di grande importanza dei modelli matematici nelle scienze e nella tecnologia deriva tanto dalla disponibilità degli strumenti matematici forniti dalla Teoria dei Sistemi quanto da quella dei computer che ne consentono la pratica implementazione.

Osservazione 1.2

L'evoluzione nell'uso dei modelli è descritta bene dal criterio di crescita delle civiltà adottato da Toynbee che non consiste, secondo questo autore, nell'incremento della capacità di controllo sull'ambiente ma in una progressiva "smaterializzazione" (*etherialization*). Questo concetto, che Toynbee deriva da Heard, ha risvolti complessi ma consiste, a grandi linee, in una transizione a campi di azione meno legati alla materia; un esempio potrebbe riguardare i supporti usati per immagazzinare le informazioni, passati dalla pietra e dalla pergamena alla carta ed ai supporti magnetici ed ottici.

I modelli matematici, formati da insiemi di relazioni astratte tra le misure degli attributi di un sistema rientrano, a loro volta, nella categoria dei sistemi (astratti). Obiettivo della Teoria dei Sistemi è, anziché lo studio di classi specifiche di sistemi reali, quello di classi molto generali di modelli matematici. L'ampia area di applicazioni che deriva da questo approccio è legata al numero limitato di classi di modelli necessari per descrivere i più svariati aspetti della realtà. La constatazione della sostanziale unitarietà dei modelli di fenomeni estremamente differenziati sul piano fisico ha quindi notevole rilevanza non solo sul piano filosofico e gnoseologico ma anche su quello pratico. Lo studio dei modelli matematici come enti astratti ha infatti consentito di definire proprietà del tutto generali (raggiungibilità, osservabilità, stabilità ecc.) che hanno poi consentito lo sviluppo di strumenti di analisi e sintesi applicabili in contesti molto diversificati. Il percorso da compiere per utilizzare questi strumenti nella soluzione di problemi reali può, concettualmente, essere suddiviso nei seguenti passi:

- Deduzione di un modello matematico per il processo in esame;
- Soluzione del problema considerato sul sistema astratto costituito dal modello;
- Implementazione sul processo reale della soluzione trovata.

Nell'iter precedente viene implicitamente assunto che il modello utilizzato descriva esattamente il sistema dal quale è stato dedotto.

Si è già osservato come i modelli matematici limitino la loro descrizione ai legami quantitativi che i sistemi stabiliscono tra i loro attributi misurabili; costituiscono quindi, in ogni caso, solo descrizioni parziali. Anche le relazioni accettate come leggi di natura possono venire considerate, al più, modelli non ancora *falsificati*. La descrizione del moto dei gravi data da Newton è un buon esempio di generale accettazione di una relazione matematica come descrizione assoluta di un fenomeno sino alla verifica della sua imprecisione a velocità relativistiche (falsificazione). La legge di Newton è, d'altronde, anche un buon esempio della ottima precisione che un modello semplice può fornire in un contesto molto ampio di situazioni.

Molti fenomeni sono semplicemente troppo complessi per poter essere descritti nei dettagli da modelli di dimensione accettabile e/o non sono governati da leggi ben definite ed immutabili; si pensi, ad esempio, ai sistemi economici. La costruzione di modelli matematici dovrebbe quindi essere governata da criteri di utilità piuttosto che da criteri (sempre relatvi) di verità.

Le approssimazioni associate ai modelli evidenziano come modelli diversi possano venire associati allo stesso sistema per finalità diverse (ad esempio interpretazione, predizione, filtraggio, diagnosi, simulazione) ottimizzandone le caratteristiche in funzione di tali finalità. I criteri di confronto tra modelli diversi hanno quindi sia importanza filosofica che pratica. Un criterio ben noto è il "rasoio di Occam" dovuto a Guglielmo di Occam (1290–1350), che afferma come il più semplice tra i modelli in grado di descrivere lo stesso fenomeno sia quello da preferire. Questo criterio ha certamente favorito l'accettazione del modello proposto, per il sistema solare, da Copernico che, prudentemente, sottolineò come il suo modello eliocentrico dovesse venire considerato solo come un esercizio per ottenere, in maniera più semplice, i risultati forniti dal modello Tolemaico ufficialmente accettato.

Una diversa formulazione del principio di parsimonia può essere trovata nell'opera di Popper che asserisce come tra tutti i modelli in grado di interpretare un insieme di osservazioni, quello da preferire sia quello in grado di spiegare il meno possibile al di fuori di tali osservazioni (modello non falsificato più potente).

1.3 CLASSIFICAZIONE DEI SISTEMI

I sistemi possono venire classificati in base a criteri diversi; quelli descritti nel seguito prescindono, come sempre nell'ambito della Teoria dei Sistemi, dalle caratteristiche fisiche e riguardano solamente il loro comportamento.

Sistemi algebrici e dinamici

Una prima fondamentale classificazione riguarda la suddivisione dei sistemi in algebrici e dinamici. I sistemi algebrici possono venire definiti come sistemi per i quali è sempre possibile, in ogni istante di tempo, porre in relazione gli attributi misurabili. Indicando con $z(t)$ l'insieme di tali attributi all'istante t, per un sistema algebrico esisterà un modello matematico del tipo

$$f\big(t, z(t)\big)= 0. \tag{1.3.1}$$

Qualora si considerino, come è usuale, modelli orientati, cioè $z(t)$ venga partizionato nell'ingresso $u(t)$ e nell'uscita $y(t)$, la (1.3.1) assumerà la forma

$$y(t) = g\big(t, u(t)\big). \tag{1.3.2}$$

La forma (1.3.2) consente di affermare che, in un sistema algebrico, l'uscita in un certo istante di tempo è funzione esclusivamente del valore assunto dall'ingresso in quello stesso istante e, eventualmente, dell'istante stesso. Ne segue che l'uscita di un sistema algebrico si adegua istantaneamente alle variazioni dell'ingresso e non subisce ulteriori variazioni se l'ingresso non viene più variato.

Esempio 1.1 – Partitore resistivo

Si consideri il partitore resistivo di Figura 1.4.

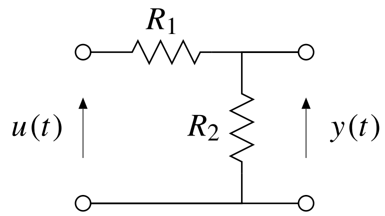

Figura 1.4 – Partitore resistivo

Assumendo l'orientamento indicato, la relazione tra ingresso ed uscita è

$$y(t) = \frac{R_2}{R_1 + R_2}\, u(t) \tag{1.3.3}$$

cioè del tipo (1.3.2) ove però il tempo non è argomento esplicito della funzione g. Si osservi come il sistema considerato non corrisponda esattamente ad alcun sistema reale (ove sono sempre presenti capacità ed induttanze parassite); si tratta quindi di una schematizzazione che può tuttavia risultare accettabile in funzione dell'uso che si intende fare del modello.

I sistemi dinamici possono essere definiti, per contrasto, come sistemi per i quali non è possibile stabilire, per ogni istante di tempo, relazioni del tipo (1.3.1), (1.3.2). Nei sistemi dinamici infatti gli attributi misurabili, o alcuni di essi, dipendono dalla storia passata del sistema ossia dai valori assunti da tali attributi negli istanti di tempo precedenti.
La grande maggioranza dei sistemi reali è costituita da processi dinamici; talvolta è tuttavia possibile descriverli, con approssimazioni accettabili, mediante modelli algebrici. Si pensi, ad esempio, alla accensione di una lampada ad incandescenza chiudendo un interruttore. Il fenomeno non avviene certo in un tempo nullo poiché, a causa della

induttanza del circuito, della inerzia termica del filamento e della dipendenza della resistenza del filamento dalla temperatura, la piena emissione viene raggiunta con un certo ritardo rispetto alla chiusura del circuito. Per molti fini pratici è tuttavia possibile schematizzare il sistema attribuendo i valori logici 0 ed 1 alla posizione dell'interruttore (aperto e chiuso) ed alla condizione della lampada (spenta e accesa) descrivendo poi il sistema mediante la funzione $y(t) = u(t)$. I sistemi algebrici possono venire studiati utilizzando modelli matematici semplici e non sono, se non marginalmente, oggetto di studio della Teoria dei Sistemi che si occupa invece essenzialmente dei sistemi dinamici.

Esempio 1.2 – Carrello

Si consideri un carrello di massa m posto su di una rotaia e soggetto alla forza $f(t)$ (Figura 1.5), assumendo come attributi misurabili la forza applicata e la velocità del carrello, $v(t)$.

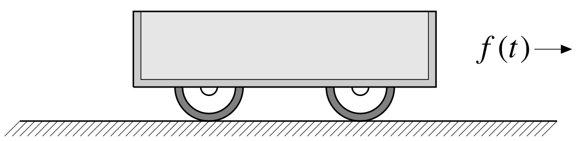

Figure 1.5 – Carrello soggetto alla forza $f(t)$

In assenza di attrito, il legame tra tali attributi è descritto dalla equazione differenziale

$$m\frac{\mathrm{d}\, v(t)}{\mathrm{d}\, t} = f(t). \tag{1.3.4}$$

Con riferimento ad un istante iniziale, t_0, la soluzione della (1.3.4) è

$$v(t) = \frac{1}{m}\int_{t_0}^{t} f(t)\,\mathrm{d}\, t + v(t_0). \tag{1.3.5}$$

La (1.3.5) costituisce un modello che lega il valore della velocità all'istante t ai valori assunti dalla forza applicata nell'intervallo $[t_0, t]$ ed al valore della velocità all'istante iniziale t_0.

Lo stato dei sistemi dinamici

Viene definito stato di un sistema dinamico in un certo istante, l'insieme di informazioni che riassume l'evoluzione subita dal sistema negli istanti precedenti ai fini della determinazione della evoluzione successiva. Lo stato non descrive quindi tutta la storia del sistema sino ad un certo istante (ad esempio i valori assunti dagli attributi misurabili) ma solo l'influenza di tale storia sulla evoluzione successiva.

Esempio 1.3 – Serbatoio

Si consideri il sistema riportato in Figura 1.6 e costituito da un serbatoio cilindrico con sezione S, alimentato da una portata di acqua, $u(t)$, che viene assunta come ingresso. Il livello dell'acqua nel serbatoio è assunto come uscita.

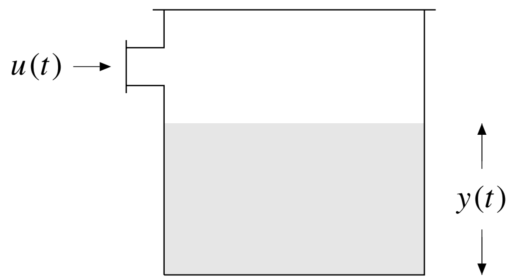

Figura 1.6 – Serbatoio alimentato dalla portata $u(t)$

Indicando con $y(t_0)$ il valore del livello in un istante iniziale t_0, le successive variazioni sono descritte dalla relazione

$$y(t) = \frac{1}{S} \int_{t_0}^{t} u(t)\,\mathrm{d}\,t + y(t_0). \tag{1.3.6}$$

La storia del sistema per $t < t_0$ è riassunta dal valore del livello in t_0; tale valore non fornisce alcuna indicazione sul modo nel quale tale livello è stato raggiunto. Si noti come, in questo caso, lo stato coincida con l'uscita del sistema.

Sistemi causali e anticipativi

Un sistema dinamico orientato viene definito causale o non anticipativo quando l'uscita in un certo istante non dipende dai valori assunti dall'ingresso negli istanti successivi. È evidente come la totalità dei sistemi reali risulti non anticipativa; tali saranno quindi anche i modelli considerati nel seguito.

Sistemi puramente dinamici e non puramente dinamici

Un sistema dinamico orientato viene detto puramente dinamico quando l'ingresso al tempo t non influenza direttamente l'uscita allo stesso istante di tempo; in caso contrario il sistema viene detto puramente dinamico. Si osservi come i sistemi considerati negli Esempi 1.2 e 1.3 risultino entrambi puramente dinamici; una variazione istantanea della forza applicata al carrello non ne altera infatti immediatamente la velocità così come una variazione della portata di acqua non altera istantaneamente il livello del serbatoio.

Sistemi stazionari e non stazionari

Un sistema viene definito stazionario quando il suo comportamento non dipende esplicitamente dal tempo. In un sistema algebrico stazionario lo stesso ingresso produrrà la stessa uscita in ogni istante di tempo. In un sistema dinamico stazionario lo stesso stato iniziale e la stessa funzione di ingresso genereranno la stessa uscita qualunque sia l'istante iniziale. Il comportamento stazionario o meno di un sistema può dipendere anche dalla scelta degli ingressi; un sistema intrinsecamente stazionario esibirà infatti un comportamento non stazionario qualora si ometta uno o più ingressi (soggetti a variazioni) dalla sua descrizione.

Sistemi a parametri concentrati e a parametri distribuiti

Molti sistemi reali riguardano fenomeni che non hanno luogo in singoli punti dello spazio ma riguardano aree o volumi (es. trasmissione del calore, fenomeni elettromagnetici, scambi di energia, sistemi meccanici ecc.). Lo stato di tali sistemi è costituito da insiemi di infiniti valori (es. la tensione e la corrente lungo una linea di trasmissione, la temperatura sui punti di una parete ecc.) ed anche i relativi modelli sono descritti, in generale, da insiemi di infiniti parametri che descrivono le caratteristiche locali del fenomeno nelle zone interessate. I modelli a parametri concentrati consentono invece la descrizione dello stato e del modello mediante insiemi finiti di valori e vengono frequentemente utilizzati anche per la descrizione di fenomeni distribuiti introducendo opportune schematizzazioni (valori costanti degli attributi del sistema in regioni di entità definita in funzione dell'uso previsto per il modello).

Sistemi a stati finiti

Per alcune categorie di sistemi lo stato, l'ingresso e l'uscita possono assumere solo un numero finito di valori. Tali sistemi vengono detti sistemi a stati finiti o automi a stati finiti. I sistemi a stati finiti costituiscono una classe importante di sistemi artificiali che include i computer, le centrali di commutazione telefonica e i sistemi digitali in generale.

Esempio 1.4 – Distributore di bevande

Si consideri un distributore di bevande che richieda, per l'erogazione, l'introduzione di monete per un totale di 2000 lire. Supponendo che le monete accettate siano solamente quelle da 100, 200 e 500 lire, si vede come l'ingresso possa assumere solamente tre valori mentre l'uscita (erogazione o meno della bevanda) può essere codificata con due soli valori. Lo stato del sistema può poi assumere, supponendo la macchina non in grado di fornire alcun resto, i 21 valori corrispondenti alla introduzione di $0, 100, 200, \ldots, 2000$ lire. La possibilità di distribuire bevande diverse e di fornire un resto porta ad un aumento del numero di ingressi, di stati e di uscite.

Sistemi lineari e non lineari

Un sistema può essere definito lineare quando per esso vale il principio della sovrapposizione degli effetti. La maggior parte dei sistemi reali è nonlineare ma consente accurate descrizioni mediante modelli lineari nell'intorno di una condizione di lavoro.

Sistemi liberi

In alcuni casi l'ambiente circostante non esercita alcuna azione su di un sistema; il relativo modello risulterà quindi privo di ingresso. I sistemi privi di ingresso vengono definiti liberi e le loro uscite vengono nche dette serie temporali.

Esempio 1.5 – Ciclo delle macchie solari

Il grafico di Figura 1.7 riporta la media annuale del conteggio delle macchie solari dal 1749 al 1983.

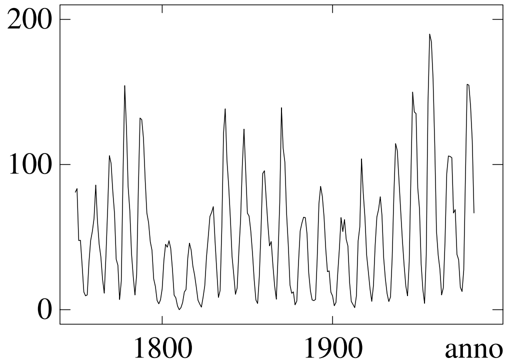

Figura 1.7 – Media annuale dei conteggi di macchie solari dal 1749 al 1983

Tali misure possono venire considerate come l'uscita di un sistema dinamico privo di ingresso.

Sistemi continui e discreti

Nella virtuale totalità dei sistemi naturali l'evoluzione degli attributi misurabili avviene con continuità nel tempo ed è quindi possibile associare un valore di tali attributi ad ogni istante di tempo. In molti sistemi artificiali (computer, sistemi di controllo, sistemi digitali in genere) gli attributi misurabili sono soggetti a variazioni solo in istanti ben precisi di tempo (in genere equidistanti). I sistemi della prima classe vengono definiti continui o a tempo continuo, quelli della seconda discreti o a tempo discreto. Va tuttavia notato come spesso si disponga delle misure degli attributi di sistemi continui solo in alcuni istanti di tempo (campionamento) e come questo porti a costruire modelli a tempo discreto anche per sistemi continui.

Sistemi SISO, MISO e MIMO

Si utilizzano gli acronimi SISO (Single Input Single Output), MISO (Multi Input Single Output) e MIMO (Multi Input Multi Output) per indicare i sistemi dotati di un singolo ingresso e di una singola uscita, di più ingressi e di una uscita e di più ingressi e più uscite.

1.4 I MODELLI DEI SISTEMI DINAMICI

La descrizione di alcune classi di modelli matematici utilizzati per descrivere i sistemi dinamici richiede la preventiva definizione degli insiemi cui appartengono le grandezze in gioco. Tali insiemi sono:

Insieme degli ingressi

Si indicherà con $\mathcal{U}$ l'insieme cui appartiene l'ingresso del sistema. Negli esempi 1.1, 1.2 e 1.3 risulta $\mathcal{U} = \mathcal{R}$. Nell'esempio 1.4 $\mathcal{U}$ contiene tre elementi che possono venire codificati con simboli arbitrari, ad esempio $\mathcal{U} = \{100, 200, 500\}$ oppure $\mathcal{U} = \{u_1, u_2, u_3\}$.

Insieme delle uscite

Si indicherà con $\mathcal{Y}$ l'insieme cui appartiene l'uscita del sistema. Negli esempi 1.1 e 1.2 risulta $\mathcal{Y} = \mathcal{R}$, nell'esempio 1.3 $\mathcal{Y} = \mathcal{R}^+$. Nell'esempio 1.4 $\mathcal{Y}$ contiene due soli elementi che possono venire codificati, ad esempio, con i simboli binari, assumendo cioè $\mathcal{Y} = \mathcal{B}$.

Insieme degli stati

L'insieme cui appartiene lo stato del sistema viene indicato con $\mathcal{X}$. Lo stato di un sistema dinamico è soggetto a variazioni nel tempo influenzate dall'ingresso del sistema. Nell'esempio 1.2 risulta $\mathcal{X} = \mathcal{R}$ mentre nell'esempio 1.3 $\mathcal{X} = \mathcal{R}^+$. Nell'esempio 1.4 lo stato può venire codificato con 21 simboli arbitrari, ad esempio $\mathcal{X} = \{x_1, x_2, \dots, x_{21}\}$.

Insieme dei tempi

Si è già visto come vengano considerati sistemi a tempo continuo e a tempo discreto. L'insieme dei tempi, che verrà indicato con $\mathcal{T}$, coinciderà con l'insieme, $\mathcal{R}$, dei numeri reali nel primo caso, con quello, $\mathcal{Z}$, dei numeri interi nel secondo caso. Nei modelli a tempo discreto derivanti da un campionamento con intervallo Δt, il tempo misura il numero di intervalli considerati; così, ad esempio, $t = 3$ indica, in realtà, il tempo (continuo) $3\Delta t$.

Insieme delle funzioni di ingresso

Tale insieme, che solo raramente viene assegnato esplicitamente, descrive le funzioni (o le sequenze, nel caso di sistemi a stati finiti) di ingresso ammissibili per il sistema. L'insieme delle funzioni di ingresso ammissibili, che verrà indicato con $\mathcal{U}_f$, potrebbe contenere, ad esempio, l'insieme delle funzioni continue o di quelle continue a tratti. Qualora, nella assegnazione di un sistema, $\mathcal{U}_f$ non venga definito, non si introduce alcuna limitazione sulle funzioni di ingresso ammissibili.

L'assegnazione di un sistema dinamico implica la definizione, implicita o esplicita, degli insiemi $\mathcal{T}$, $\mathcal{U}$, $\mathcal{Y}$, $\mathcal{X}$, $\mathcal{U}_f$. Fanno eccezione i modelli ingresso/uscita per i quali non è richiesta la definizione dell'insieme degli stati, $\mathcal{X}$.

Modelli esterni dei sistemi dinamici

Tali modelli descrivono l'evoluzione nel tempo dell'uscita di un sistema a partire da un istante iniziale nel quale sia noto lo stato. Sono costituiti da una *funzione di risposta*

$$y(t) = \gamma\big(t, t_0, x_0, u(\cdot)\big) \tag{1.4.1}$$

che è definita per $t \geq t_0$ ma non necessariamente per $t < t_0$. Il simbolo $u(\cdot)$ indica la funzione di ingresso nell'intervallo chiuso $[t_0, t]$.

Osservazione 1.3

Si noti come l'intervallo $[t_0, t]$ nel quale è richiesta la conoscenza dell'ingresso nella (1.4.1) è limitato, a destra, dalla causalità del sistema e, a sinistra, dalla informazione sulla storia che precede l'istante iniziale t_0 fornita dallo stato iniziale $x_0 = x(t_0)$. Si osservi ancora come nel caso di sistemi puramente dinamici $y(t)$ non dipenda da $u(t)$ e, pertanto, risulti $u(\cdot) = u[t_0, t)$.

La definizione della funzione di risposta consente di introdurre le definizioni di stati equivalenti e di forma minima. Tali definizioni giocano un ruolo fondamentale nella trattazione successiva.

Stati equivalenti

Due stati x_1 e x_2 vengono definiti equivalenti quando le risposte generate da x_1 e da x_2 in qualunque intervallo $[t_0, t_1]$ risultano identiche per qualunque funzione di ingresso. Per due stati equivalenti x_1 e x_2 vale quindi la relazione

$$\gamma\big(t, t_0, x_1, u(\cdot)\big) = \gamma\big(t, t_0, x_2, u(\cdot)\big), \;\; \forall\, t \in [t_0, t_1], \;\; \forall\, u(\cdot) \in \mathcal{U}_f. \tag{1.4.2}$$

Sistemi in forma minima

Un sistema dinamico è detto in forma minima quando il suo insieme degli stati non contiene stati equivalenti.

Stati iniziali equivalenti non possono venire distinti in alcun modo poiché generano la stessa risposta con qualunque ingresso. La presenza di stati equivalenti aumenta quindi la complessità di un sistema senza contribuire in alcun modo alla relazione stabilita dal sistema tra ingressi ed uscite. Stati equivalenti sono legati, dal punto di vista matematico, da una *relazione di equivalenza* come è immediato verificare osservando che:

- Ogni stato è equivalente a sé stesso (riflessività);
- Se $x_1 \equiv x_2$ e $x_2 \equiv x_3$, segue che $x_1 \equiv x_3$ (transitività);

- Se $x_1 \equiv x_2$, $x_2 \equiv x_1$ (simmetria).

Sistemi equivalenti

Due sistemi dinamici Σ_1 e Σ_2 vengono definiti equivalenti se hanno gli stessi insiemi dei tempi, degli ingressi, delle uscite e delle funzioni di ingresso e se per ogni stato $x_1 \in \mathcal{X}_1$ del primo sistema esiste almeno uno stato $x_2 \in \mathcal{X}_2$ del secondo tale che

$$\gamma_1\big(t, t_0, x_1, u(\cdot)\big) = \gamma_2\big(t, t_0, x_2, u(\cdot)\big),\ \forall t_0,\ \forall t \geq t_0,\ \forall u(\cdot) \in \mathcal{U}_f. \qquad (1.4.3)$$

Dualmente, per ogni $x_2 \in \mathcal{X}_2$ deve esistere almeno uno stato $x_1 \in \mathcal{X}_1$ tale che valga la (1.4.3).

La definizione di equivalenza tra sistemi non implica l'eguaglianza dei rispettivi insiemi degli stati che possono anche contenere un numero diverso di elementi; tale condizione è invece verificata nel caso in cui Σ_1 e Σ_2 siano entrambi in forma minima. Sistemi equivalenti hanno lo stesso comportamento esterno, risultano cioè indistinguibili in base alla sola osservazione dell'ingresso e dell'uscita.

Modelli interni

I modelli interni o ingresso/stato/uscita descrivono, oltre all'evoluzione nel tempo dell'uscita del sistema, anche quella dello stato. Sono costituiti dalla *funzione di transizione dello stato*

$$x(t) = \varphi\big(t, t_0, x_0, u(\cdot)\big) \qquad (1.4.4)$$

e dalla *funzione di uscita*

$$y(t) = g\big(t, x(t), u(t)\big). \qquad (1.4.5)$$

La funzione di transizione dello stato è del tutto analoga alla funzione di risposta; come la γ, non risulta necessariamente definita per $t < t_0$ e la dipendenza dall'ingresso è limitata all'intervallo $[t_0, t]$. Qualora si consideri un intervallo di ampiezza nulla, si assuma cioè $t_0 = t$, la (1.4.4) soddisferà la relazione

$$x(t) = \varphi\big(t, t, x(t), u(t)\big); \qquad (1.4.6)$$

tale proprietà della φ prende il nome di *consistenza*. È poi evidente come, risultando lo stato in un certo istante univocamente definito, $x(t)$ possa venire calcolato facendo riferimento a qualunque istante iniziale; se $t > t_1 > t_0$, ad esempio, risulterà

$$x(t) = \varphi\big(t, t_0, x_0, u(\cdot)\big) = \varphi\big(t, t_1, x_1, u(\cdot)\big) \qquad (1.4.7)$$

ove $x_1 = \varphi\big(t_1, t_0, x_0, u(\cdot)\big)$. La (1.4.7) definisce la proprietà di *composizione* della φ.

Verrà ora dimostrato come i modelli esterni implichino quelli interni e viceversa.

Teorema 1.1

Ogni modello esterno (1.4.1) implica, per un sistema dinamico in forma minima, un modello interno (1.4.4)–(1.4.5).

Dimostrazione

La funzione di uscita deriva immediatamente dalla funzione di risposta ponendo $t_0 = t$. Si supponga poi che l'evoluzione dello stato del sistema descritto dalla (1.4.1), che si suppone in forma minima, non sia descritto dalla (1.4.4) ma da una diversa funzione

$$x(t) = \varphi'\big(t, t_0, x_0, u(\cdot), \alpha\big)$$

ove α indica, globalmente, ulteriori argomenti rispetto a quelli della funzione di transizione dello stato (1.4.4). La dipendenza della φ' da α implica l'esistenza di almeno un istante di tempo t' compreso tra t_0 e t e di due insiemi di argomenti, α_1 e α_2 tali che gli stati

$$x_1(t') = \varphi'\big(t', t_0, x_0, u(\cdot), \alpha_1\big)$$
$$x_2(t') = \varphi'\big(t', t_0, x_0, u(\cdot), \alpha_2\big)$$

differiscano. L'unicità dell'uscita del sistema in ogni istante, definita dalla funzione di risposta, implica tuttavia, per $t \geq t'$, la relazione

$$y(t) = \gamma\big(t, t', x_1(t'), u(\cdot)\big) = \gamma\big(t, t', x_2(t'), u(\cdot)\big)$$

ossia, data l'assenza di ipotesi su $u(\cdot)$, l'equivalenza di $x_1(t')$ e di $x_2(t')$ in contrasto con l'ipotesi di forma minima. Ne segue che $x_1(t') = x_2(t')$ cioè la non dipendenza della funzione di transizione dello stato da argomenti diversi da t, t_0, x_0 e $u(\cdot)$; tale funzione sarà quindi del tipo (1.4.4).

Si osservi come la dimostrazione precedente sia basata sulla ipotesi di forma minima del sistema. La dimostrazione data evidenzia come abolendo tale ipotesi sia possibile definire funzioni di transizione dello stato che includono ulteriori argomenti oltre a quelli della (1.4.4); gli stati che si ottengono agendo solo su tali argomenti risultano tuttavia equivalenti.

Teorema 1.2

Ogni modello interno (1.4.4)–(1.4.5) implica un modello esterno (1.4.1).

Dimostrazione

La sostituzione della (1.4.4) nella (1.4.5) fornisce immediatamente un modello esterno del tipo (1.4.1).

In genere i modelli ingresso/stato/uscita utilizzati per assegnare un sistema non sono del tipo (1.4.4)–(1.4.5) ma modelli differenziali nel caso dei sistemi continui e modelli alle differenze nel caso dei sistemi discreti.

Modelli interni differenziali

I modelli interni differenziali per i sistemi dinamici a tempo continuo sono costituiti dagli insiemi $\mathcal{T}$, $\mathcal{U}$, $\mathcal{Y}$, $\mathcal{X}$, $\mathcal{U}_f$ ove $\mathcal{T} = \mathcal{R}$, dalla equazione differenziale

$$\dot{x}(t) = f\big(x(t), u(t), t\big) \tag{1.4.8}$$

che descrive la velocità di transizione dello stato e dalla funzione di uscita

$$y(t) = g\big(x(t), u(t), t\big) \tag{1.4.9}$$

già definita per i modelli interni (1.4.4)–(1.4.5). La (1.4.8) deve ammettere soluzione unica per ogni istante e stato iniziale e per ogni funzione di ingresso ammissibile.

Modelli interni alle differenze

I modelli interni alle differenze per i sistemi dinamici a tempo discreto sono costituiti dagli insiemi $\mathcal{T}$, $\mathcal{U}$, $\mathcal{Y}$, $\mathcal{X}$, $\mathcal{U}_f$ ove $\mathcal{T} = \mathcal{Z}$, dalla equazione alle differenze

$$x(t+1) = f\big(x(t), u(t), t\big) \tag{1.4.10}$$

che descrive lo stato futuro e dalla funzione di uscita

$$y(t) = g\big(x(t), u(t), t\big). \tag{1.4.11}$$

È evidente come i modelli (1.4.8)–(1.4.9) e (1.4.10)–(1.4.11) definiscano univocamente modelli interni del tipo (1.4.4)–(1.4.5) e quindi anche modelli esterni del tipo (1.4.1). Si osservi come t non risulti argomento delle funzioni γ, φ, f e g nei sistemi stazionari.

Osservazione 1.4

La struttura dei modelli interni evidenzia come qualunque sistema dinamico possa venire interpretato come formato da due sistemi, uno puramente dinamico ed uno algebrico, opportunamente interconnessi. Facendo riferimento ad un sistema, Σ, descritto dal modello interno (1.4.4)–(1.4.5), si consideri un primo sistema, Σ_1, con ingresso $u(t)$, funzione di transizione dello stato (1.4.4) ed uscita $y_1(t)$ coincidente con lo stato, $y_1(t) = x(t)$. Dato che $y_1(t)$ non dipende da $u(t)$, Σ_1 è un sistema puramente dinamico. Si consideri poi il sistema algebrico Σ_2 descritto dal modello $y(t) = g(t, y_1(t), u(t))$; la interconnessione di Σ_1 e Σ_2 illustrata in Figura 1.8 risulta ovviamente equivalente a Σ essendo descritta dallo stesso modello.

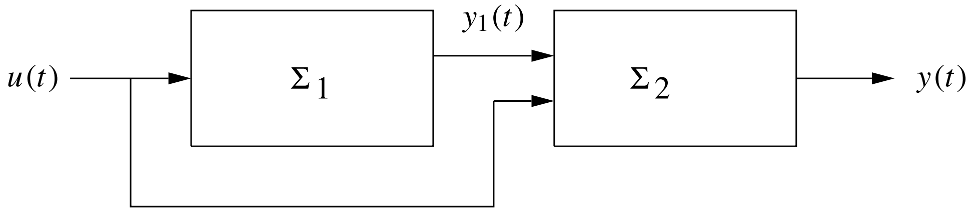

Figura 1.8 – Scomposizione di un sistema non puramente dinamico

1.5 CONFIGURAZIONI DI PIÙ SISTEMI

Alcuni sistemi dinamici sono costituiti (o possono essere pensati come costituiti) da due o più sistemi interconnessi. Le interconnessioni usualmente considerate sono quelle relative ai sistemi in retroazione, in cascata e in parallelo.

Sistemi in retroazione

Un sistema dinamico Σ è costituito da due sistemi Σ_1 e Σ_2 configurati in retroazione (mutua) quando l'ingresso di ognuno di essi è funzione dell'uscita dell'altro e di un eventuale ingresso di Σ. Tale configurazione, rappresentata in Figura 1.9, richiede che Σ_1 e Σ_2 siano entrambi continui o discreti.

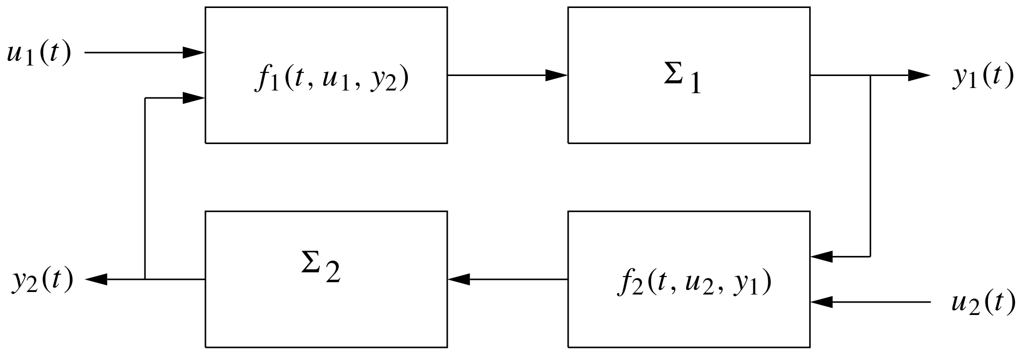

Figura 1.9 – Configurazione in retroazione di due sistemi dinamici

Se $u_1 \in \mathcal{U}_1$ e $u_2 \in \mathcal{U}_2$, l'insieme degli ingressi di Σ sarà $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2$. Analogamente risulterà $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}_1 \times \mathcal{Y}_2$ e $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2$ ove $\mathcal{Y}_1$, $\mathcal{X}_1$, Y_2, $\mathcal{X}_2$ indicano gli insiemi delle uscite e degli stati di Σ_1 e Σ_2. La configurazione in retroazione può venire considerata anche per un singolo sistema, secondo lo schema di Figura 1.10

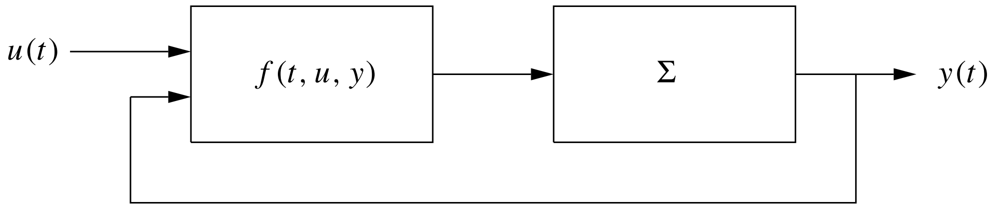

Figura 1.10 – Configurazione in retroazione di un sistema dinamico

Sistemi in cascata

Un sistema dinamico Σ è costituito da due sistemi Σ_1 e Σ_2 configurati in cascata quando l'ingresso di Σ_2 è costituito dall'uscita di Σ_1, secondo lo schema riportato in Figura 1.11. Più in generale u_2 potrebbe essere una funzione di y_1, potrebbe cioè essere presente tra Σ_1 e Σ_2 un sistema algebrico descritto dal modello $u_2(t) = f(t, y_1(t))$.

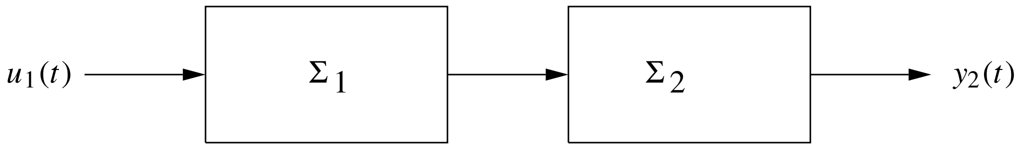

Figura 1.11 – Configurazione in cascata di due sistemi dinamici

Sistemi in parallelo

Un sistema dinamico Σ è costituito da due sistemi Σ_1 e Σ_2 configurati in parallelo quando l'ingresso di Σ coincide con quello di Σ_1 e Σ_2 mentre la sua uscita è funzione delle uscite di tali sistemi, secondo lo schema riportato in Figura 1.12. Anche in questo caso è necessario che Σ_1 e Σ_2 siano entrambi continui o discreti; risulta inoltre $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 = \mathcal{U}_2$, $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2$.

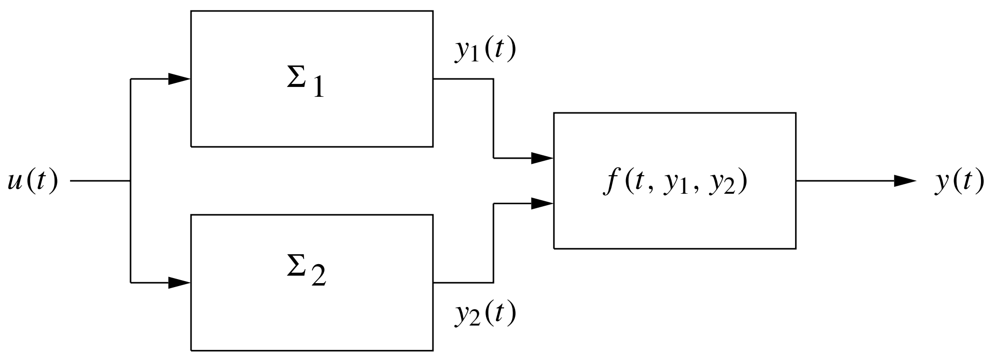

Figura 1.12 – Configurazione in parallelo di due sistemi dinamici

1.6 RISPOSTE E MOTI

La funzione di risposta di un sistema dinamico fornisce, noto lo stato del sistema in un istante iniziale t_0 e la funzione di ingresso per $t \geq t_0$, l'andamento nel tempo dell'uscita a partire da t_0. Si definisce *risposta* del sistema l'insieme delle coppie $(t,\, y(t))$ definite formalmente dall'espressione

$$\big\{\big(t, y(t)\big)\colon\; y(t) = \gamma\big(t, t_0, x_0, u(\cdot)\big),\; t \in [t_0, -]\big\} \tag{1.6.1}$$

ed appartenenti a $\mathcal{T} \times \mathcal{Y}$. L'insieme dei valori assunti dall'uscita ma non associati ai rispettivi istanti di tempo, definiti dalla espressione

$$\big\{y(t) = \gamma\big(t, t_0, x_0, u(\cdot)\big),\; t \in [t_0, -]\big\} \tag{1.6.2}$$

viene definito *traiettoria delle uscite*. La funzione di transizione fornisce, analogamente, noto lo stato del sistema in t_0 e la funzione di ingresso per $t \geq t_0$, l'andamento nel tempo dello stato a partire da t_0. Si definisce *moto* o *movimento* l'insieme delle coppie $(t, x(t))$ definite da

$$\big\{\big(t, x(t)\big)\colon\; x(t) = \varphi\big(t, t_0, x_0, u(\cdot)\big),\; t \in [t_0, -]\big\} \tag{1.6.3}$$

appartenenti a $\mathcal{T} \times \mathcal{X}$. L'insieme dei valori assunti dallo stato ma non associati ai rispettivi istanti di tempo, definiti da

$$\big\{x(t) = \varphi\big(t, t_0, x_0, u(\cdot)\big),\; t \in [t_0, -]\big\} \tag{1.6.4}$$

viene definito *traiettoria dello stato* o semplicemente *traiettoria*.

Osservazione 1.5

Tra gli insiemi necessari per definire un sistema dinamico non compare né l'insieme, $\mathcal{Y}_f$, delle risposte ammissibili né quello, $\mathcal{X}_f$, dei moti ammissibili. Tali insiemi vengono definiti implicitamente dalle funzioni di risposta e di transizione dello stato; risulta infatti

$$\mathcal{Y}_f = \big\{y(\cdot) :\; y(t) = \gamma\big(t, t_0, x_0, u(\cdot)\big),\; t \geq t_0,\; t_0 \in \mathcal{T},\; u(\cdot) \in \mathcal{U}_f\big\} \tag{1.6.5}$$

$$\mathcal{X}_f = \big\{x(\cdot) :\; x(t) = \varphi\big(t, t_0, x_0, u(\cdot)\big),\; t \geq t_0,\; t_0 \in \mathcal{T},\; u(\cdot) \in \mathcal{U}_f\big\} \tag{1.6.6}$$

1.7 USCITE E STATI DI EQUILIBRIO

Le traiettorie percorse dall'uscita e dallo stato di un sistema dinamico dipendono dallo stato iniziale, dalla funzione di ingresso e, nei sistemi non stazionari, dall'istante iniziale considerato. Le definizioni di uscita e di stato di equilibrio fanno riferimento alla possibilità di mantenere costante l'uscita o lo stato agendo opportunamente sull'ingresso.

Uscite di equilibrio

Una uscita $y \in \mathcal{Y}$ è definita *di equilibrio per* $t \geq t_0$ se esiste uno stato iniziale $x_0 \in \mathcal{X}$ ed una funzione di ingresso $u(\cdot) \in \mathcal{U}_f$ tali che valga la relazione

$$y = \gamma\big(t, t_0, x_0, u(\cdot)\big), \ t \geq t_0. \tag{1.7.7}$$

La definizione precedente può venire ristretta ad un intervallo specifico $[t_0, t_1]$. Se la (1.7.7) vale per ogni t_0, y viene definita *uscita di equilibrio*.

Stati di equilibrio

Uno stato $x \in \mathcal{X}$ è definito *di equilibrio per* $t \geq t_0$ se esiste una funzione di ingresso $u(\cdot) \in \mathcal{U}_f$ che soddisfi la relazione

$$x = \varphi\big(t, t_0, x_0, u(\cdot)\big), \ t \geq t_0. \tag{1.7.8}$$

Anche la (1.7.8) può venire ristretta ad un intervallo $[t_0, t_1]$; se tale relazione vale per ogni t_0, x viene definito *stato di equilibrio*.

Nei sistemi non stazionari uno stato di equilibrio non corrisponde necessariamente ad una uscita di equilibrio e viceversa. Nei sistemi stazionari, non essendo il tempo argomento esplicito della funzione di uscita, uno stato di equilibrio corrisponde sempre ad una uscita di equilibrio mentre non vale la proprietà inversa potendo esistere moti che non determinano variazioni dell'uscita.

1.8 ALCUNI PROBLEMI DI ANALISI E DI SINTESI

Si è già visto come l'uso delle metodologie sistemistiche richieda, come primo passo, la deduzione di un modello matematico. Il passo successivo consiste nella utilizzazione di tale modello nella soluzione di problemi di analisi e/o di sintesi.

Problemi di analisi affrontati nel seguito riguardano:

- Il calcolo della risposta e del moto;
- La deduzione della risposta a regime del sistema ad ingressi sinusoidali di frequenza diversa;
- La deduzione della risposta del sistema ad ingressi particolari (impulso, gradino, rampa ecc.);
- Lo studio della possibilità di ottenere la transizione tra stati assegnati;

- Lo studio della possibilità di dedurre lo stato del sistema dalle osservazioni effettuate sull'ingresso e sull'uscita;
- Lo studio della capacità del sistema di generare moti e risposte limitate quando l'ingresso è limitato;
- Lo studio della possibilità di modificare alcune caratteristiche del sistema mediante retroazione.

Problemi di sintesi pure affrontati nel seguito riguardano:

- Il calcolo della funzione di ingresso che risolve un assegnato problema di controllo;
- La determinazione di un modello lineare che approssimi un sistema non lineare nell'intorno di uno stato;
- La costruzione di un osservatore dello stato cioè di un sistema dinamico che, collegato all'ingresso ed all'uscita del sistema da osservare, fornisca una stima del suo stato;
- Il progetto di una retroazione che assegni al sistema caratteristiche prefissate;
- La determinazione del modello di un sistema a partire dalla sua risposta impulsiva;
- La determinazione del modello di un sistema a partire da sequenze di ingresso/uscita;
- La determinazione del modello di un sistema a partire da sequenze di ingresso/uscita affette da rumore additivo.

1.9 CONTENUTI E PERCORSI DI LETTURA

Il carattere introduttivo di questo testo e l'utenza per la quale è stato sviluppato hanno imposto scelte precise tanto sui contenuti quanto sulla presentazione degli stessi. Si è così preferito rinunciare ad una trattazione generale ma supeficiale limitandola invece alla classe dei sistemi lineari stazionari continui e discreti. Qusta scelta, che priva il lettore di molti interessanti argomenti quali, per citarne solo alcuni, quelli relativi ai sistemi a stati finiti, alla teoria della stabilità dei moti dei sistemi non lineari ed alla teoria dei sistemi lineari non stazionari, consente tuttavia di trattare senza eccessivi compromessi i sistemi lineari stazionari cioè un settore di preponderante importanza applicativa.

Nell'analisi di questa classe di sistemi si fa poi sempre riferimento, in prima istanza, ai sistemi discreti, passando solo successivamente a quelli continui. Questo approccio, che risulterebbe innaturale in trattazioni di livello più elevato, ha fornito ottimi risultati nei corsi introduttivi tenuti dall'autore tanto in ambito industriale che accademico; consente infatti agli allievi con preparazione matematica limitata di ridurre ulteriormente i contenuti analizzando a fondo i soli modelli discreti che richiedono strumenti matematici relativamente semplici ma giocano il ruolo più importante anche per i processi continui.

1.10 NOTE BIBLIOGRAFICHE

La letteratura relativa alla Teoria dei Sistemi offre, a partire dal classico lavoro di Zadeh e Desoer (1963), molti testi sui quali possono venire approfondite le definizioni e le considerazioni introduttive svolte in questo primo capitolo.

Per la letteratura in italiano si potrà fare riferimento ai testi di Rinaldi (1973), Ruberti e Isidori (1979), Fornasini e Marchesini (1988) e Marro (1989).

Molto vasta poi la disponibilità di testi in lingua inglese; oltre al citato testo di Zadeh e Desoer possono venire consultate, tra le tante, le opere di Gill (1962), Freeman (1965), Ogata (1967), Kalman, Falb e Arbib (1969), Zadeh e Polak (1969), Rosenbrock (1970), Brockett (1970), Chen (1970), Polak e Wong (1970), Desoer (1970), Rubio (1971), Luenberger (1979), Kailath (1980).

Aspetti più generali dell'approccio sistemistico sono trattati da Klir (1969) e Von Bertalanffy (1970). L'evoluzione dei modelli nelle scienze e nell'ingegneria è discussa da Cobelli, Lepschy e Milo (1975) mentre alcuni aspetti filosofici della costruzione di modelli per i sistemi sono analizzati da Popper (1934, 1963) e da Willems (1986). Le citate osservazioni sulla evoluzione delle civiltà possono infine venire trovate nella monumentale opera di Toynbee (1934–61).

1.11 PROBLEMI

Problema 1.1

Si consideri il dipolo elettrico riportato in Figura 1.13, i cui attributi misurabili sono costituiti dalla tensione ai suoi capi e dalla corrente che lo attraversa.

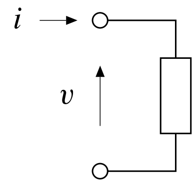

Figura 1.13 – Dipolo elettrico

Si discutano i possibili orientamenti di tale sistema ed i contesti nei quali risulta opportuno adottarli.

Problema 1.2

Si consideri la rete descritta nell'esempio 1.1 e si sostituisca R_2 con un termistore la cui resistenza varia in funzione della temperatura secondo la legge $R(T)$. Si classifichi il nuovo sistema che si è ottenuto.

Problema 1.3

Si consideri il sistema costruito nel problema 1.2, assumendo come ingressi la tensione u e la temperatura, T, del termistore. Si classifichi tale sistema.

Problema 1.4

Si consideri la rete RC riportata, con il relativo orientamento, in Figura 1.14 e si classifichi tale sistema.

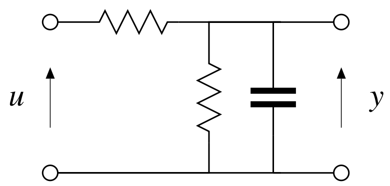

Figura 1.14 – Rete RC

Problema 1.5

Si consideri la rete RC riportata, con il relativo orientamento, in Figura 1.15 e si classifichi tale sistema.

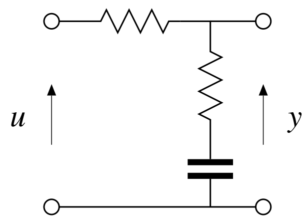

Figura 1.15 – Rete RC

Problema 1.6

Si determini lo stato del sistema descritto dalla Figura 1.15.

Problema 1.7

Si consideri la rete RLC riportata, con il relativo orientamento, in Figura 1.16 e si determini lo stato di tale sistema quando il pilotaggio è in tensione e quando è in corrente, quando cioè l'ambiente esterno impone al sistema la tensione v e quando impone la corrente di ingresso i.

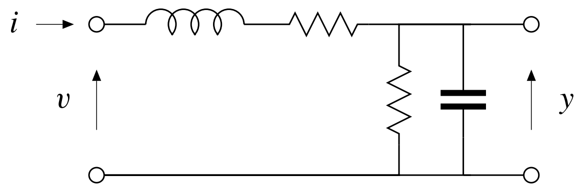

Figura 1.16 – Rete RLC

Problema 1.8

Si consideri il sistema descritto nell'esempio 1.2 assumendo come uscita la posizione del carrello e si costruisca un modello di tale sistema.

Problema 1.9

Si consideri il sistema descritto nell'esempio 1.3 assumendo un serbatoio a sezione variabile $S(y)$. Si costruisca un modello per tale sistema e lo si classifichi.

Problema 1.10

Si consideri il sistema descritto nell'esempio 1.3 assumendo $t_0 = 0$, $y(0) = 0$, portata costante $u(t) = q$ e si calcoli la risposta.

Problema 1.11

Si consideri un distributore di carburante che accetta banconote da L. 10 000 e 50 000 per un importo massimo di L. 50 000. Si calcoli il numero minimo di stati necessario per realizzare tale sistema.

Problema 1.12

Si consideri una linea di trasmissione costituita da un cavo sospeso con induttanza L per unità di lunghezza e con capacità C rispetto al terreno, sempre per unità di lunghezza. Tale linea ha per ingresso la tensione, $u(t)$, rispetto a terra di una estremità e per uscita la tensione, $y(t)$, all'altra estremità che è chiusa su un carico resistivo. Si classifichi tale sistema e se descriva lo stato.

Problema 1.13

Si consideri il modello preda–predatore descritto dalle equazioni

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_1 x_1 \left(1 - \frac{x_1}{k}\right) - a_2 x_1 x_2 \\ \dot{x}_2 &= -a_3 x_2 + a_4 x_1 x_2 \end{aligned}$$

ove x_1 indica il numero delle prede e x_2 quello dei predatori. Si assuma l'uscita $y = [x_1,\ x_2]^T$ e si classifichi tale modello.

Problema 1.14

Si valutino gli stati di equilibrio del modello preda–predatore descritto nel problema 1.13.

Problema 1.15

Si consideri il modello interno descritto dalle equazioni

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{at}\, x_0 + \int_{t_0}^{t} b\, u(t)\, \mathrm{d}\, t \\ y(t) &= c\, x(t) + d\, u(t). \end{aligned}$$

Si classifichi tale sistema.

Problema 1.16

Si consideri il modello interno assegnato nel problema 1.15 e si determini il corrispondente modello esterno.

Problema 1.17

Due sistemi dinamici Σ_1 e Σ_2, entrambi in forma minima, hanno insiemi degli stati con un numero diverso di elementi. Si valuti la possibilità che Σ_1 e Σ_2 siano equivalenti.

Problema 1.18

Due stati x_1 e x_2 di un sistema dinamico danno luogo alla stessa risposta a partire da un istante iniziale t_0 con ogni funzione di ingresso ammissibile. Si discuta la possibilità che x_1 e x_2 siano equivalenti.

Problema 1.19

La funzione di uscita di un sistema dinamico è

$$g\big(t, x(t), u(t)\big) = \sin t + 2\, x(t).$$

Si valuti se gli stati di equilibrio di tale sistema corrispondono a uscite di equilibrio.

Problema 1.20

Un sistema dinamico lineare e discreto è descritto dal modello

$$\begin{aligned} x(t+1) &= x(t) + 3\, u(t) \\ y(t) &= 2\, x(t) \end{aligned}$$

Si determinino gli stati di equilibrio con ingresso nullo di tale sistema.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

Brockett, R.W. (1970). *Finite–Dimensional Linear Systems*. Wiley, New York.

Chen, C.T. (1970). *Introduction to Linear System Theory*. Holt, Rinehart e Winston, New York.

Cobelli, C., A. Lepschy e S. Milo (1975). Considerazioni sull'impiego di modelli formalizzati nell'ingegneria ed in altre discipline. *Atti e Memorie dell'Accademia Patavina di Scienze, Lettere ed Arti*, vol. LXXXVII, part II, pp. 193–209.

Desoer, C.A. (1970). *Notes for a Second Course on Linear Systems*. Van Nostrand, London.

Fornasini, E. e G. Marchesini (1988). *Appunti di Teoria dei Sistemi*. Edizioni Libreria Progetto, Padova.

Freeman, H. (1965). *Discrete–Time Systems*. Wiley, London.

Gill, A. (1962). *Introduction to the Theory of Finite–State Machines*. cGraw–Hill, New York.

Kailath, T. (1980). *Linear Systems*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J.

Kalman, R.E., P. Falb e M.A. Arbib (1969). *Topics in Mathematical System Theory*. McGraw–Hill, New York.

Klir, G.J. (1969). *An Approach to General System Theory*. Van Nostrand, London.

Luenberger, D.G. (1979). *Introduction to Dynamic Systems: Theory, Models and Applications*. Wiley, New York.

Marro, G. (1989). *Teoria dei Sistemi e del Controllo*. Zanichelli, Bologna.

Ogata, K. (1967). *State Space Analysis of Control Systems*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J.

Polak, E. e E. Wong (1970). *Notes for a First Course on Linear Systems*. Van Nostrand, London.

Popper, K.R. (1934). *The Logic of Scientific Discovery*. Basic Books, New York.

Popper, K.R. (1963). *Conjectures and Refutations*. Harper and Row, London.

Rinaldi, S. (1973). *Teoria dei Sistemi*. Clup, Milano.

Rosenbrock, H.H. (1970). *State Space and Multivariable Theory*. Nelson, London.

Ruberti, A. e A. Isidori (1979). *Teoria dei Sistemi*. Boringhieri, Torino.

Rubio, J.E. (1971). *The Theory of Linear Systems*. Academic Press, New York.

Toynbee, A.J. (1934–61, paperback 1962–64). *A Study of History* (ten volumes + volume XI: *Historical Atlas and Gazetteers*, by A.J. Toynbee and D. Miers + volume XII: *Reconsiderations*). Oxford University Press, London.

Von Bertalanffy, L. (1970). *General System Theory*. Braziller, New York.

Willems, J.C. (1986). From time–series to linear systems. Part I: Finite dimensional linear time invariant systems. *Automatica*, vol. 22, pp. 561–580.

Zadeh, L.A. e C.A. Desoer (1963). *Linear System Theory*. McGraw–Hill, New York.
Zadeh, L.A. e E. Polak (1969). *System Theory*. McGraw–Hill, New York.