2

Stabilità dei sistemi dinamici

2.1 STABILITÀ DEI MOTI E DELLE RISPOSTE

Con il termine *stabilità* si indica in genere l'attitudine di un sistema dinamico a reagire con variazioni limitate del moto o della risposta a perturbazioni dello stato iniziale o dell'ingresso.

Definizione 2.1 – Moto di riferimento: Dato un sistema dinamico Σ con spazio degli stati a dimensioni finite $\mathcal{X}$, che si assumerà uguale ad $\mathcal{R}^n$, l'istante iniziale t_0, lo stato iniziale $\bar{x}_0$ e la funzione di ingresso $\bar{u}(\cdot)$, si userà la locuzione *moto di riferimento* per indicare il moto

$$\bar{x}(t) = \varphi\big(t, t_0, \bar{x}_0, \bar{u}(\cdot)\big), \qquad t \geq t_0. \tag{2.1.1}$$

Si noti come una stessa traiettoria possa corrispondere a più moti di riferimento e come un moto ottenibile con più funzioni di ingresso corrisponda a moti di riferimento diversi al variare dell'ingresso considerato.

Definizione 2.2 – Perturbazione del moto causata dallo stato iniziale: Si consideri una perturbazione δx_0 dello stato iniziale; il moto di riferimento è soggetto alla corrispondente perturbazione

$$\delta x_1(t) = \varphi\big(t, t_0, \bar{x}_0 + \delta x_0, \bar{u}(\cdot)\big) - \bar{x}(t), \qquad t \geq t_0. \tag{2.1.2}$$

Definizione 2.3 – Perturbazione del moto causata dalla funzione di ingresso: Si consideri una perturbazione $\delta u(\cdot)$ della funzione di ingresso; il moto di riferimento è soggetto alla corrispondente perturbazione

$$\delta x_2(t) = \varphi\big(t, t_0, \bar{x}_0, \bar{u}(\cdot)+\delta u(\cdot)\big)-\bar{x}(t), \qquad t \geq t_0. \tag{2.1.3}$$

Definizione 2.4 – Stabilità di un moto rispetto a perturbazioni dello stato iniziale: Il moto di riferimento $\bar{x}(\cdot)$ si dice *stabile rispetto a perturbazioni dello stato iniziale* se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\eta > 0$ tale che

$$\|\delta x_1(t)\| < \varepsilon\,, \quad t \geq t_0\,, \quad \forall\, \delta x_0 \ni \|\delta x_0\| < \eta \tag{2.1.4}$$

ove $\|\cdot\|$ indica una qualunque norma di $\mathcal{R}^n$.

L'instabilità è definita come assenza delle condizioni di stabilità: il moto di riferimento si dice quindi *instabile* se non soddisfa la condizione (2.1.4)

Definizione 2.5 – Stabilità asintotica di un moto rispetto a perturbazioni dello stato iniziale: Il moto di riferimento $\bar{x}(\cdot)$ si dice *asintoticamente stabile* rispetto a perturbazioni dello stato iniziale se soddisfa la condizione (2.1.4) e se

$$\lim_{t\to\infty} \|\delta x_1(t)\| = 0\,, \quad \forall\, \delta x_0 \ni \|\delta x_0\| < \eta. \tag{2.1.5}$$

Definizione 2.6 – Stabilità di un moto rispetto a perturbazioni dell'ingresso: Il moto di riferimento $\bar{x}(\cdot)$ si dice *stabile rispetto a perturbazioni della funzione di ingresso* se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\eta > 0$ tale che

$$\|\delta x_2(t)\| < \varepsilon\,, \quad t \geq t_0\,, \ \forall\, \delta u(\cdot) \ni \|\delta u(t)\| < \eta. \tag{2.1.6}$$

Definizione 2.7 – Risposta di riferimento: Dato un sistema dinamico Σ con spazio degli stati a dimensioni finite $\mathcal{X}$, che si assumerà uguale ad $\mathcal{R}^n$, l'istante iniziale t_0, lo stato iniziale $\bar{x}_0$ e la funzione di ingresso $\bar{u}(\cdot)$, si userà la locuzione *risposta di riferimento* per indicare la risposta

$$\bar{y}(t) = \gamma\big(t, t_0, \bar{x}_0, \bar{u}(\cdot)\big), \qquad t \geq t_0. \tag{2.1.7}$$

Si noti come una stessa risposta possa corrispondere a più moti di riferimento e come una risposta ottenibile con più funzioni di ingresso corrisponda a risposte di riferimento diverse.

Definizione 2.8 – Perturbazione della risposta causata dallo stato iniziale: Si consideri una perturbazione δx_0 dello stato iniziale; la risposta di riferimento è soggetta alla corrispondente perturbazione

$$\delta y_1(t) = \gamma\big(t, t_0, \bar{x}_0+\delta x_0, \bar{u}(\cdot)\big)-\bar{y}(t), \qquad t \geq t_0. \tag{2.1.8}$$

Definizione 2.9 – Perturbazione della risposta causata dalla funzione di ingresso: Si consideri una perturbazione $\delta u(\cdot)$ della funzione di ingresso; la risposta di riferimento è soggetta alla corrispondente perturbazione

$$\delta y_2(t) = \gamma\big(t, t_0, \bar{x}_0, \bar{u}(\cdot)+\delta u(\cdot)\big)-\bar{y}(t), \qquad t \geq t_0. \tag{2.1.9}$$

Definizione 2.10 – Stabilità di una risposta rispetto a perturbazioni dello stato iniziale: La risposta di riferimento $\bar{y}(\cdot)$ si dice *stabile rispetto a perturbazioni dello stato iniziale* se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\eta > 0$ tale che

$$\|\delta y_1(t)\| < \varepsilon\,, \quad t \geq t_0\,, \qquad \forall\, \delta x_0 \ni \|\delta x_0\| < \eta \tag{2.1.10}$$

ove $\|\cdot\|$ indica una qualunque norma di $\mathcal{R}^n$.

Definizione 2.11 – Stabilità asintotica di una risposta rispetto a perturbazioni dello stato iniziale: La risposta di riferimento $\bar{y}(\cdot)$ si dice *asintoticamente stabile* rispetto a perturbazioni dello stato iniziale se soddisfa la condizione (2.1.10) e se

$$\lim_{t\to\infty} \|\delta y_1(t)\| = 0\,, \qquad \forall\, \delta x_0 \ni \|\delta x_0\| < \eta. \tag{2.1.11}$$

Definizione 2.12 – Stabilità di una risposta rispetto a perturbazioni dell'ingresso: La risposta di riferimento $\bar{y}(\cdot)$ si dice *stabile rispetto a perturbazioni della funzione di ingresso* se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\eta > 0$ tale che

$$\|\delta y_2(t)\| < \varepsilon\,, \; t \geq t_0\,, \; \forall\, \delta u(\cdot) \ni \|\delta u(t)\| < \eta. \tag{2.1.12}$$

2.2 STABILITÀ DEGLI STATI E DELLE USCITE DI EQUILIBRIO

Essendo gli stati di equilibrio particolari moti, sono applicabili a tali stati tutte le definizioni di stabilità già viste per i moti. Al solo fine di una maggiore chiarezza tali definizioni vengono qui ripetute facendo riferimento, in maniera esplicita, a stati di equilibrio.

Definizione 2.13 – Stabilità di uno stato di equilibrio: Uno stato di equilibrio $\bar{x}$ relativo alla funzione di ingresso $\bar{u}(\cdot)$ applicata per $t \geq t_0$ si dice *stabile* per $t \geq t_0$ se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\eta > 0$ tale che risulti

$$\|\varphi(t, t_0, \bar{x} + \delta x_0, \bar{u}(\cdot)) - \bar{x}\| < \varepsilon\,, \; t \geq t_0\,, \forall\, \delta x_0 \ni \|\delta x_0\| < \eta. \tag{2.2.1}$$

Lo stato di equilibrio $\bar{x}$ si dice *instabile* per $t \geq t_0$ se non soddisfa la condizione (2.2.1).

Definizione 2.14 – Stabilità asintotica di uno stato di equilibrio: Lo stato di equilibrio $\bar{x}$ relativo alla funzione di ingresso $\bar{u}(\cdot)$ applicata per $t \geq t_0$ si dice *asintoticamente stabile* per $t \geq t_0$ se soddisfa la condizione (2.2.1) e se

$$\lim_{t\to\infty} \|\varphi(t, t_0, \bar{x} + \delta x_0, \bar{u}(\cdot)) - \bar{x}\| = 0\,, \ \forall\, \delta x_0 \ni \|\delta x_0\| < \eta. \tag{2.2.2}$$

Definizione 2.15 – Stabilità di uno stato di equilibrio rispetto a perturbazioni dell'ingresso: Lo stato di equilibrio $\bar{x}$ corrispondente alla funzione di ingresso $\bar{u}(\cdot)$ applicata per $t \geq t_0$ si dice *stabile rispetto a perturbazioni della funzione di ingresso* per $t \geq t_0$ se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\eta > 0$ tale che

$$\|\varphi(t, t_0, \bar{x}, \bar{u}(\cdot) + \delta u(t)) - \bar{x}\| < \varepsilon\,, \ \forall\, \delta u(\cdot) \ni \|\delta u(t)\| < \eta\,, \ \ t \geq t_0. \tag{2.2.3}$$

In maniera del tutto analoga a quanto fatto per gli stati di equilibrio, è possibile riformulare, per le uscite di equilibrio, le seguenti definizioni.

Definizione 2.16 – Stabilità di un'uscita di equilibrio: L'uscita di equilibrio $\bar{y}$ relativa alla funzione di ingresso $\bar{u}(\cdot)$ applicata per $t \geq t_0$ si dice *stabile* per $t \geq t_0$ se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\eta > 0$ tale che risulti

$$\|\gamma(t, t_0, \bar{x} + \delta x_0, \bar{u}(\cdot)) - \bar{y}\| < \varepsilon\,, \ t \geq t_0\,, \forall\, \delta x_0 \ni \|\delta x_0\| < \eta. \tag{2.2.4}$$

L'uscita di equilibrio $\bar{y}$ si dice *instabile* per $t \geq t_0$ se non soddisfa la condizione (2.2.4).

Definizione 2.17 – Stabilità asintotica di un'uscita di equilibrio: L'uscita di equilibrio $\bar{y}$ relativa alla funzione di ingresso $\bar{u}(\cdot)$ applicata per $t \geq t_0$ si dice *asintoticamente stabile* per $t \geq t_0$ se soddisfa la condizione (2.2.4) e se

$$\lim_{t\to\infty} \|\gamma(t, t_0, \bar{x} + \delta x_0, \bar{u}(\cdot)) - \bar{y}\| = 0\,, \ \forall\, \delta x_0 \ni \|\delta x_0\| < \eta. \tag{2.2.5}$$

Definizione 2.18 – Stabilità di un'uscita di equilibrio rispetto a perturbazioni dell'ingresso: L'uscita di equilibrio $\bar{y}$ corrispondente alla funzione di ingresso $\bar{u}(\cdot)$ applicata per $t \geq t_0$ si dice *stabile rispetto a perturbazioni della funzione di ingresso* per $t \geq t_0$ se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\eta > 0$ tale che

$$\|\gamma(t, t_0, \bar{x}, \bar{u}(\cdot) + \delta u(t)) - \bar{y}\| < \varepsilon\,, \quad \forall\, \delta u(\cdot) \ni \|\delta u(t)\| < \eta\,, \ \ t \geq t_0. \tag{2.2.6}$$

2.3 STABILITÀ “IN PICCOLO” E “IN GRANDE”

Le definizioni di stabilità viste sino ad ora fanno riferimento alla cosiddetta *stabilità in piccolo* o *locale*, cioè alla capacità del moto o della risposta di rispondere con variazioni comunque piccole a perturbazioni dello stato iniziale o della funzione di ingresso. Quando invece si vuole dare una misura dell'entità delle perturbazioni cui corrisponde un comportamento stabile dei moti e delle traiettorie si parla di *stabilità in grande*. Le definizioni che seguono si riferiscono alla stabilità in grande.

Definizione 2.19 – Dominio di stabilità asintotica per un moto: Se il moto di riferimento $\bar{x}(\cdot)$ corrispondente a t_0, $\bar{x}_0$, $\bar{u}(\cdot)$ è asintoticamente stabile, esiste un insieme di stati iniziali $\mathcal{X}_0(t_0, \bar{x}_0, \bar{u}(\cdot))$ tale che la (5) sia soddisfatta per variazioni dello stato iniziale δx_0 tali che $\bar{x}_0 + \delta x_0 \in \mathcal{X}_0$. $\mathcal{X}_0$ è detto *dominio di stabilità asintotica* per il moto di riferimento considerato.

Definizione 2.20 – Stabilità asintotica globale di un moto: Se è $\mathcal{X}_0(t_0, \bar{x}_0, \bar{u}(\cdot)) = \mathcal{X}$, il moto di riferimento $\bar{x}(\cdot)$ si dice *globalmente asintoticamente stabile*. Se ciò avviene per ogni $\bar{u}(\cdot)$, il *sistema* Σ si dice globalmente asintoticamente stabile per $t \geq t_0$.

Definizione 2.21 – Dominio di stabilità asintotica per una risposta: Se la risposta di riferimento $\bar{y}(\cdot)$ corrispondente a $t_0, \bar{x}_0, \bar{u}(\cdot)$ è asintoticamente stabile, esiste un insieme di stati iniziali $\mathcal{X}_0(t_0, \bar{x}_0, \bar{u}(\cdot))$ tale che la (11) sia soddisfatta per variazioni dello stato iniziale δx_0 tali che $\bar{x}_0 + \delta x_0 \in \mathcal{X}_0$. $\mathcal{X}_0$ è detto *dominio di stabilità asintotica* per la risposta di riferimento considerata.

Definizione 2.22 – Stabilità asintotica globale di una risposta: Se è $\mathcal{X}_0(t_0, \bar{x}_0, \bar{u}(\cdot)) = \mathcal{X}$, la risposta di riferimento $\bar{y}(\cdot)$ si dice *globalmente asintoticamente stabile*.

Definizione 2.23 – Stabilità i.l.s.l.: Il moto di riferimento $\bar{x}(\cdot)$, si dice *stabile ingresso limitato - stato limitato* (stabile i.l.s.l.) se esistono due numeri reali positivi M_u ed M_x, in generale funzioni di t_0, $\bar{x}_0$, $\bar{u}(\cdot)$, tali che

$$\|\delta x_2(t)\| < M_x \ , \ \forall\, \delta u(\cdot) \ni \|\delta u(t)\| < M_u \ , \ t \geq t_0 \tag{2.3.1}$$

ove la variazione $\delta x_2(t)$ è definita dalla (2.1.3).

Definizione 2.24 – Stabilità i.l.u.l.: La risposta di riferimento $\bar{y}(\cdot)$ si dice *stabile ingresso limitato - uscita limitata* (stabile i.l.u.l.) se esistono due numeri reali positivi M_u ed M_y, in generale funzioni di t_0, $\bar{x}_0$, $\bar{u}(\cdot)$, tali che

$$\|\delta y_2(t)\| < M_y \ , \ \forall\, \delta u(\cdot) \ni \|\delta u(t)\| < M_u \ , \ t \geq t_0 \tag{2.3.2}$$

ove la variazione $\delta y_2(t)$ è definita dalla (2.1.9).

2.4 INTRODUZIONE AI CRITERI DI STABILITÀ DI LIAPUNOV

Prima di introdurre i criteri di stabilità basati sul metodo diretto di Liapunov sono opportune alcune considerazioni formulate nel seguito come osservazioni.

Osservazione 2.1 – Le definizioni di stabilità viste in precedenza fanno riferimento a singoli moti, stati di equilibrio, risposte ed uscite di equilibrio di sistemi dinamici non stazionari descrivibili mediante i modelli differenziali

$$\dot{x}(t) = f\big(x(t), u(t), t\big) \tag{2.4.1}$$
$$y(t) = g\big(x(t), u(t), t\big) \tag{2.4.2}$$

o mediante i modelli alle differenze

$$x(t+1) = f\big(x(t), u(t), t\big) \tag{2.4.3}$$
$$y(t) = g\big(x(t), u(t), t\big). \tag{2.4.4}$$

Poiché tali moti, stati di equilibrio, risposte ed uscite di equilibrio fanno riferimento ad una ben precisa ed assegnata funzione di ingresso $\bar{u}(\cdot)$, è possibile incorporare tale ingresso nelle funzioni f e g e considerare, per lo studio della loro stabilità, modelli del tipo

$$\dot{x}(t) = \bar{f}\big(x(t), t\big) \tag{2.4.5}$$
$$y(t) = \bar{g}\big(x(t), t\big) \tag{2.4.6}$$

o del tipo

$$x(t+1) = \bar{f}\big(x(t), t\big) \tag{2.4.7}$$
$$y(t) = \bar{g}\big(x(t), t\big). \tag{2.4.8}$$

Naturalmente se si desidera considerare un diverso ingresso $\bar{u}(\cdot)$ occorre considerare anche diverse funzioni $\bar{f}$ e $\bar{g}$.

Osservazione 2.2 – Mediante un cambiamento di coordinate è sempre possibile fare coincidere uno stato od una uscita di equilibrio con l'origine dello spazio degli stati o dello spazio delle uscite. Ciò richiede, ovviamente, la modifica delle funzioni $\bar{f}$ e $\bar{g}$ (2.4.5)–(2.4.6) o (2.4.7)–(2.4.8).

Osservazione 2.3 – Si consideri il sistema non stazionario (2.4.1)–(2.4.2) ed il moto di riferimento $\bar{x}(\cdot)$. Per la perturbazione del moto $\delta x_1(t)$ definita dalla (2.1.2) è possibile scrivere la relazione

$$\delta\dot{x}_1(t) = f\big(\bar{x}(t) + \delta x_1(t), \bar{u}(t), t\big) - f\big(\bar{x}(t), \bar{u}(t), t\big).$$

Analogamente per la perturbazione dell'uscita $\delta y_1(t)$ definita dalla (2.1.8) è possibile scrivere la relazione

$$\delta y_1(t) = g\big(\bar{x}(t) + \delta x_1(t), \bar{u}(t), t\big) - g\big(\bar{x}(t), \bar{u}(t), t\big).$$

Essendo f e g note e $\bar{u}(\cdot)$ assegnato, si possono scrivere le relazioni precedenti nella forma

$$\delta\dot{x}_1(t) = f_1\big(\delta x_1(t), t\big) \tag{2.4.9}$$
$$\delta y_1(t) = g_1\big(\delta x_1(t), t\big) \tag{2.4.10}$$

ove le funzioni f_1 e g_1 dipendono da $u(\cdot)$ e t_0. Il modello (2.4.9)–(2.4.10) rappresenta un sistema libero per il quale lo stato zero e l'uscita zero sono di equilibrio per $t \geq t_0$.

Osservazione 2.4 – Quanto detto per i sistemi continui può essere ripetuto per i sistemi a tempo discreto.

Osservazione 2.5 – La stabilità semplice ed asintotica per $t \geq t_0$ dello stato zero del sistema libero (2.4.9)–(2.4.10) per perturbazioni dello stato iniziale corrisponde alla stabilità semplice ed asintotica del moto di riferimento $\bar{x}(\cdot)$ per perturbazioni dello stato iniziale. Lo stesso legame esiste tra la stabilità semplice ed asintotica per $t \geq t_0$ dell'uscita zero del sistema libero (2.4.9)–(2.4.10) e la stabilità semplice ed asintotica della risposta di riferimento $\bar{y}(\cdot)$ del sistema (2.4.1)–(2.4.2) per perturbazioni dello stato iniziale.

Osservazione 2.6 – Quanto detto per il moto di riferimento $\bar{x}(\cdot)$ e la risposta di riferimento $\bar{y}(\cdot)$ del sistema (2.4.1)–(2.4.2) può essere ripetuto per qualunque stato di equilibrio e uscita di equilibrio per $t \geq t_0$ di tale sistema. Ne segue che lo studio della stabilità, per perturbazioni dello stato iniziale, di ogni moto, stato di equilibrio, risposta e uscita di equilibrio di un sistema dinamico generico può sempre essere ricondotto allo studio della stabilità, per perturbazioni dello stato iniziale, dello stato zero di un opportuno sistema libero del tipo (2.4.9)–(2.4.10) o di un analogo sistema discreto. Per non appesantire la notazione si indicheranno tali modelli come segue

$$\dot{x}(t) = f_1\big(x(t), t\big) \tag{2.4.11}$$
$$y(t) = g_1\big(x(t), t\big) \tag{2.4.12}$$

e

$$x(t+1) = f_1\big(x(t), t\big) \tag{2.4.13}$$
$$y(t) = g_1\big(x(t), t\big). \tag{2.4.14}$$

2.5 I CRITERI DI STABILITÀ DI LIAPUNOV

Tali criteri consentono di valutare la stabilità, per perturbazioni dello stato iniziale, dello stato zero di un sistema del tipo (2.4.11)–(2.4.12) o (2.4.13)–(2.4.14); la soluzione di tale problema porta, come si è visto, alla valutazione della stabilità, per perturbazioni dello stato iniziale, dei moti di riferimento e degli stati di equilibrio di un sistema generico del tipo (2.4.1)–(2.4.2) o (2.4.3)–(2.4.4).

I criteri di Liapunov verranno dapprima enunciati con riferimento al caso più semplice in cui il tempo non sia argomento della funzione f_1, risulti cioè

$$\dot{x}(t) = f_1\big(x(t)\big); \tag{2.5.1}$$

i risultati verranno poi estesi al caso generale.

Definizione 2.25 – Funzioni definite positive: Una funzione $V(x)$ si dice *definita positiva* in un intorno $\mathcal{D}$ dell'origine dello spazio degli stati se per ogni $x \in \mathcal{D}$:

a) $V(x)$ ha derivate parziali continue rispetto alle componenti di x ;

b) $V(0) = 0$;

c) $V(x) > 0\,,\ \forall x \neq 0$;

Definizione 2.26 – Funzioni di Liapunov: Una funzione $V(x)$ è detta *funzione di Liapunov* in un intorno $\mathcal{D}$ dell'origine dello spazio degli stati del sistema (2.4.11)–(2.4.12) se

a) $V(x)$ è definita positiva in $\mathcal{D}$;

b) $\dot{V}(x) = \langle\, \mathrm{grad}\, V,\ f_1(x)\,\rangle \leq 0\,,\ \forall x \in \mathcal{D}$.

Teorema 2.1 – Stabilità semplice: Lo stato zero del sistema (2.5.1) è stabile, per perturbazioni dello stato iniziale, se esiste una funzione di Liapunov, $V(x)$, in un intorno $\mathcal{D}$ dell'origine dello spazio degli stati.

Dimostrazione: Si indichi con $\mathcal{S}(0,\alpha)$ l'intorno sferico di raggio α dell'origine ossia l'insieme dei vettori x con $\|x\| < \alpha$. La stabilità dell'origine è verificata se per ogni numero reale $\varepsilon > 0$ esiste un numero reale $\eta > 0$ tale che per ogni $x(t_0) \in \mathcal{S}(0,\eta)$ risulti $x(t) \in \mathcal{S}(0,\varepsilon)$ per $t \geq t_0$. Se $V(x)$ è una funzione di Liapunov in un intorno $\mathcal{D}$ dell'origine allora, essendo $V(x)$ definita positiva, esiste un numero reale positivo k tale che l'insieme $\mathcal{V}(k) = \{x\,:\, V(x) \leq k\}$ sia contenuto in $\mathcal{S}(0,\varepsilon)$. Scegliendo $\eta > 0$ in modo che risulti $\mathcal{S}(0,\eta) \subset \mathcal{V}(k)$, se $x(t_0) \in \mathcal{S}(0,\eta)$ risulta $V(x(t_0)) \leq k$ e, risultando $V(x)$ noncrescente lungo qualunque traiettoria, pure $x(t) \in \mathcal{V}(k)$, $\forall t > t_0$ quindi $x(t) \in \mathcal{S}(0,\varepsilon)$, $\forall t \geq t_0$.

Teorema 2.2 – Stabilità asintotica: Lo stato zero del sistema (2.5.1) è asintoticamente stabile, per perturbazioni dello stato iniziale, se esiste una funzione di Liapunov, $V(x)$, in un intorno $\mathcal{D}$ dell'origine dello spazio degli stati tale che $\dot{V}(x) < 0\,,\ \forall x \neq 0$.

Dimostrazione: Ponendo

$$h = \inf_{x \in \mathcal{V}(k)} \left(-\frac{\dot{V}(x)}{V(x)} \right)$$

è possibile scrivere la relazione

$$\dot{V}(x) \leq -h\, V(x)\,,\ \forall x \in \mathcal{V}(k).$$

I valori assunti dalla funzione $V(x)$ lungo la traiettoria corrispondente al moto $x(t)$ soddisfano la diseguaglianza

$$V\big(x(t)\big) \leq \mathrm{e}^{-h(t-t_0)}\, V\big(x(t_0)\big) \leq k\, \mathrm{e}^{-h(t-t_0)};$$

la traiettoria appartiene quindi all'insieme $\mathcal{V}(k\,\mathrm{e}^{-h(t-t_0)})$ che tende allo stato zero per $t \to \infty$.

Esempio 2.1 – Si consideri il sistema meccanico rappresentato in Figura 2.1, costituito da una sferetta di massa M appesa all'estremità di una molla che esercita una forza elastica legata in maniera non lineare al suo allungamento, z_1, secondo la legge $F(z_1)$.

Figura 2.1 – Sferetta appesa

Indicando con z_2 la velocità di spostamento della sferetta e con u la somma della forza peso e di eventuali altre forze applicate, il sistema è descritto dalle equazioni

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= -F(z_1)/M + u/M. \end{aligned}$$

Si indichi poi con $z_e = (z_{1e}, z_{2e}) = (z_{1e}, 0)$ lo stato di equilibrio corrispondente ad $u_e = Mg$. Per studiarne la stabilità con il criterio di Liapunov si considerino le nuove variabili di stato $x_1 = z_1 - z_{1e}$, $x_2 = z_2$ rispetto alle quali il comportamento del sistema nello stato di equilibrio considerato è descritto dalle equazioni

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -F(x_1 + z_{1e})/M + u_e/M. \end{aligned}$$

Si tratta di un modello del tipo

$$\dot{x}(t) = f_1(x(t))$$

con l'origine come stato di equilibrio. Si consideri, per studiarne la stabilità, la funzione $V(x)$ che esprime la variazione dell'energia totale del sistema rispetto a quella posseduta nello stato $x = (0, 0)$

$$V(x) = \int_0^{x_1} F(\xi + z_{1e})\, \mathrm{d}\xi - Mgx_1 + M\frac{x_2^2}{2}.$$

La derivata rispetto al tempo della $V(x)$ è data da

$$\dot{V}(x) = \langle\, \mathrm{grad}\, V,\, f_1(x)\, \rangle = \big(F(x_1{+}z_{1e}){-}Mg\big)x_2{+}Mx_2\big({-}F(x_1{+}z_{1e}){+}Mg\big)/M = 0.$$

In qualunque intorno dell'origine è pertanto soddisfatta la condizione $\dot{V}(x) \le 0$ e risulta inoltre $V(0) = 0$. La funzione $V(x)$ soddisfa tutte le condizioni del Teorema 2.1 ed il punto di equilibrio considerato è stabile.

Osservazione 2.7 – Si noti come non si sia fatto riferimento, negli enunciati dei Teoremi 2.1 e 2.2, all'istante iniziale t_0; ciò a causa della stazionarietà del sistema (2.5.1) considerato. Considerando ora il caso generale di un sistema non stazionario descritto dal modello (2.4.11)–(2.4.12), l'estensione dei risultati precedenti si ottiene introducendo funzioni di Liapunov dipendenti non solo da x ma anche da t, $V(x,t)$, la cui derivata rispetto al tempo è data da

$$\dot{V}(x,t) = \langle\, \mathrm{grad}_x V,\, f_1(x,t)\, \rangle + \frac{\partial V}{\partial \mathrm{t}}.$$

Nell'estensione dei Teoremi 2.1 e 2.2 che si ottiene introducendo le funzioni di Liapunov $V(x,t)$ occorrerà fare nuovamente riferimento all'istante iniziale t_0 per definire la stabilità semplice ed asintotica dello stato zero.

Il teorema che segue, di cui si omette la dimostrazione, illustra l'applicazione del metodo di Liapunov nella determinazione di condizioni di stabilità asintotica globale.

Teorema 2.3 – Stabilità asintotica globale: Il sistema (2.5.1) è globalmente asintoticamente stabile nello stato zero se esiste una funzione di Liapunov definita nell'intero spazio degli stati $\mathcal{X}$ tale che $\dot{V}(x) < 0$, $\forall x \neq 0$ e che $\lim_{\|x\| \to \infty} V(x) = \infty$. Condizioni analoghe valgono per il sistema non stazionario (2.4.11)–(2.4.12) con riferimento alla funzione $V(x,t)$.

Osservazione 2.8 – L'estensione dei criteri di Liapunov ai sistemi discreti si ottiene definendo in maniera opportuna le funzioni di Liapunov. Si consideri, per semplicità, il modello stazionario

$$x(t+1) = f_1(x(t)); \tag{2.5.2}$$

una funzione $V(x)$ si definisce di Liapunov in un intorno $\mathcal{D}$ dell'origine dello spazio degli stati del sistema (2.5.2) se

$$\Delta V(x) = V\big(f_1(x)\big){-}V(x) \le 0,\ \forall x \in \mathcal{D}.$$

I Teoremi 2.1 e 2.2 possono poi venire riformulati sostituendo $\Delta V(x)$ a $\dot{V}(x)$.

2.6 LINEARIZZAZIONE DEI SISTEMI NON LINEARI

Si consideri un sistema dinamico non lineare e non stazionario descritto dal modello (2.4.1)–(2.4.2) ed il moto di riferimento $\bar{x}(\cdot)$ (2.1.1) per il quale risulta

$$\dot{\bar{x}}(t) = f\big(\bar{x}(t), \bar{u}(t), t\big). \tag{2.6.1}$$

Considerando sia una perturbazione dello stato iniziale, δx_0, che una perturbazione della funzione di ingresso, $\delta u(\cdot)$, si ottiene il moto perturbato $\bar{x}(\cdot) + \delta x(\cdot)$ per il quale risulta

$$\dot{\bar{x}}(t) + \delta\dot{x}(t) = f\big(\bar{x}(t) + \delta x(t), \bar{u}(t) + \delta u(t), t\big). \tag{2.6.2}$$

Se la funzione f è sviluppabile in serie di Taylor risulta

$$\dot{\bar{x}}(t) + \delta\dot{x}(t) = f\big(\bar{x}(t), \bar{u}(t), t\big) + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{\theta\bar{x}(t)\\ \theta\bar{u}(t)}} \delta x(t) + \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{\substack{\theta\bar{x}(t)\\ \theta\bar{u}(t)}} \delta u(t) + \ldots\, . \tag{2.6.3}$$

Arrestando lo sviluppo in serie al secondo termine e tenendo presente la (2.6.1) si ottiene il modello linearizzato

$$\delta\dot{x}(t) = A(t)\,\delta x(t) + B(t)\,\delta u(t) \tag{2.6.4}$$

ove

$$A(t) = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{\theta\bar{x}(t)\\ \theta\bar{u}(t)}}, \qquad B(t) = \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{\substack{\theta\bar{x}(t)\\ \theta\bar{u}(t)}}. \tag{2.6.5}$$

Se si considera un sistema dinamico non lineare e stazionario e lo si linearizza nell'intorno dello stato di equilibrio x_e corrispondente all'ingresso costante u_e, si ottiene il modello stazionario

$$\delta\dot{x}(t) = A\,\delta x(t) + B\,\delta u(t) \tag{2.6.6}$$

ove

$$A = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{\theta x = x_e\\ \theta u = u_e}}, \qquad B = \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{\substack{\theta x = x_e\\ \theta u = u_e}}. \tag{2.6.7}$$

Esempio 2.2

Un ecosistema contiene una popolazione di erbivori (conigli) che si considera come unica fonte di nutrimento di una seconda popolazione di carnivori predatori (volpi). Il modello preda–predatore che descrive l'interazione tra tali popolazioni è

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = a_1 x_1\Big(1 - \frac{x_1}{k}\Big) - a_2 x_1 x_2$$

$$\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} = -a_3 x_2 + a_4 x_1 x_2$$

ove le variabili di stato x_1 ed x_2 indicano, in unità opportune, il numero di prede ed il numero di predatori presenti. La costante k rappresenta la capacità portante dell'ecosistema nei riguardi delle prede cioè il numero massimo di conigli che, a regime, possono essere presenti in assenza di volpi. Il sistema è privo di ingresso.

Il modello considerato ammette lo stato di equilibrio ovvio $x_1 = 0$, $x_2 = 0$. Altre condizioni di equilibrio possono essere dedotte annullando le derivate delle variabili di stato:

$$
\begin{aligned}
0 &= a_1 x_1 \left(1 - \frac{x_1}{k}\right) - a_2 x_1 x_2 \\
0 &= -a_3 x_2 + a_4 x_1 x_2 .
\end{aligned}
$$

Da tali relazioni si ricavano i valori delle variabili di stato in condizioni di equilibrio, dati da

$$
x_{1e} = \frac{a_3}{a_4} \qquad\qquad x_{2e} = \frac{a_1}{a_2}\left(1 - \frac{a_3}{k a_4}\right).
$$

Le equazioni logistiche preda–predatore costituiscono, come si è visto, un modello non lineare del tipo

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} &= f_1(x_1, x_2) \\
\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} &= f_2(x_1, x_2)
\end{aligned}
$$

che ammette, quando è soddisfatta la condizione $a_3/a_4 < k$, una condizione di equilibrio diversa da quella ovvia ed associata alla presenza contemporanea di prede e predatori. Nell'intorno di tali condizioni è possibile utilizzare un modello linearizzato del tipo

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}z_1}{\mathrm{d}t} &= \frac{\partial f_1}{\partial x_1} z_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} z_2 \\
\frac{\mathrm{d}z_2}{\mathrm{d}t} &= \frac{\partial f_2}{\partial x_1} z_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} z_2
\end{aligned}
$$

ove le derivate parziali di f_1 ed f_2 sono calcolate per $x = x_e$ e le nuove variabili di stato

$$
\begin{aligned}
z_1 &= x_1 - x_{1e} \\
z_2 &= x_2 - x_{2e}
\end{aligned}
$$

rappresentano la deviazione dello stato del sistema studiato rispetto alla condizione di equilibrio considerata. Per il sistema in esame risulta

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f_1}{\partial x_1} &= a_1 - \frac{2a_1 x_{1e}}{k} - a_2 x_{2e} \\
\frac{\partial f_1}{\partial x_2} &= -\, a_2 x_{1e} \\
\frac{\partial f_2}{\partial x_1} &= a_4 x_{2e} \\
\frac{\partial f_2}{\partial x_2} &= -\, a_3 + a_4 x_{1e}.
\end{aligned}
$$

Il modello linearizzato ottenuto è quindi del tipo

$$\dot{z}(t) = A\, z(t)$$

con la matrice dinamica A data da

$$A = \begin{bmatrix} a_1 - \dfrac{2a_1 x_{1e}}{k} - a_2 x_{2e} & -a_2 x_{1e} \\ a_4 x_{2e} & -a_3 + a_4 x_{1e} \end{bmatrix}.$$

2.7 IL CRITERIO RIDOTTO DI LIAPUNOV

La stabilità dello stato di equilibrio rispetto al quale si è linearizzato un sistema non lineare può essere studiata valutando la stabilità del modello lineare ottenuto. Valgono al riguardo i seguenti criteri.

Teorema 2.4 – Criterio ridotto di Liapunov: Lo stato di equilibrio rispetto al quale è stato ottenuto il modello linearizzato (2.6.6) è asintoticamente stabile se tutti gli autovalori della matrice dinamica A del modello linearizzato sono a parte reale negativa, se cioè il modello linearizzato è asintoticamente stabile.

Teorema 2.5 – Lo stato di equilibrio rispetto al quale è stato ottenuto il modello linearizzato (2.6.6) è instabile se la matrice dinamica A del modello linearizzato ha uno o più autovalori a parte reale positiva.

Osservazione 2.9 – Nel caso la matrice dinamica del modello linearizzato abbia alcuni autovalori a parte reale negativa ed i rimanenti a parte reale nulla non è possibile trarre conclusioni sulla stabilità dello stato di equilibrio nell'intorno del quale si è linearizzato.

2.8 IL CRITERIO DI INSTABILITÀ DI LIAPUNOV

Oltre ai criteri di stabilità possono essere enunciati criteri di instabilità per gli stati di equilibrio di sistemi dinamici non lineari liberi del tipo (2.4.11)–(2.4.12) e (2.4.13)–(2.4.14). Ci si limita qui ad enunciare due criteri tra i più noti, dovuti a Liapunov e Cetaev, per sistemi liberi e stazionari del tipo (2.5.1) per i quali lo stato zero sia uno stato di equilibrio.

Teorema 2.6 – Criterio di instabilità di Liapunov: Sia $V(x)$ una funzione continua con derivate parziali continue in un intorno $\mathcal{D}$ contenente l'origine dello spazio degli stati del sistema (2.5.1). Tale funzione si annulli nell'origine ed assuma valori positivi in punti arbitrariamente vicini all'origine; $\dot{V}(x) = \langle \operatorname{grad} V,\, f_1(x) \rangle$ risulti inoltre definita positiva in un intorno $\mathcal{D}$ dell'origine. Allora lo stato zero è di equilibrio instabile.