

Un amplificatore operazionale è retroazionato mediante la rete  $R$ - $C$  riportata in Figura 13.1.

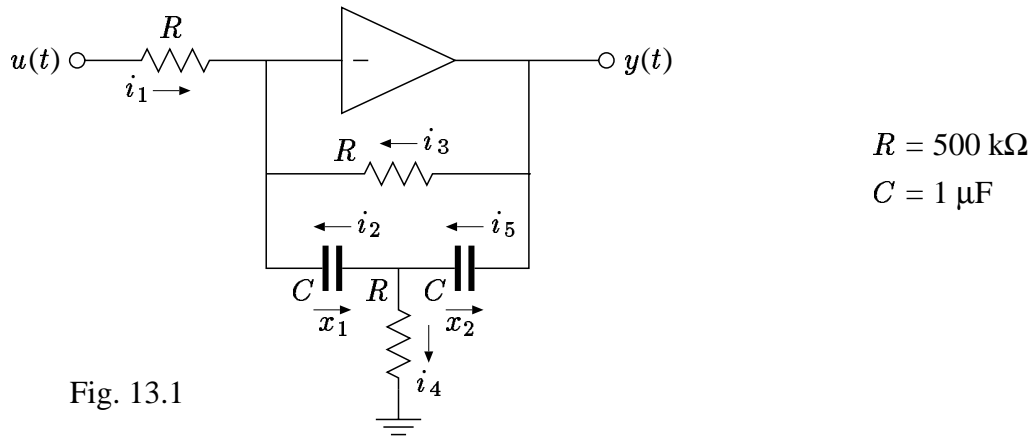


Fig. 13.1

Si considerino ideali le caratteristiche dell'amplificatore.

- 1) Si determini un modello nello spazio degli stati per tale sistema;
- 2) Si valuti la stabilità i.l.u.l.;
- 3) Si determini la funzione di trasferimento e la risposta frequenziale.

### SOLUZIONE

1) Si assumano come variabili di stato,  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$ , le tensioni ai capi dei due condensatori e si indichino con  $i_1, i_2 \dots i_5$  le correnti nei vari rami come in figura. L'ipotesi che l'amplificatore operazionale sia ideale implica che il suo ingresso sia una massa virtuale e che la corrente di ingresso e la impedenza di uscita siano nulle. Sotto tali ipotesi è immediato scrivere le seguenti relazioni

$$i_1 = \frac{u}{R}$$

$$i_2 = -i_1 - i_3$$

$$i_3 = \frac{x_1 + x_2}{R}$$

$$i_4 = \frac{x_1}{R}$$

$$i_5 = i_2 + i_4$$

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{1}{C} i_2$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{1}{C} i_5$$

$$y = x_1 + x_2 .$$

Eliminando le correnti dalle relazioni precedenti si ottengono le seguenti equazioni differenziali del prim'ordine

$$\frac{dx_1}{dt} = -\frac{1}{RC} x_1 - \frac{1}{RC} x_2 - \frac{1}{RC} u$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -\frac{1}{RC} x_2 - \frac{1}{RC} u .$$

Si è quindi ottenuto un modello nello spazio degli stati descritto dalle matrici

$$A = \begin{bmatrix} -1/RC & -1/RC \\ 0 & -1/RC \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -1/RC \\ -1/RC \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} .$$

2) Sostituendo ad  $R$  e  $C$  i valori forniti dal testo dell'esercizio si ottiene

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} .$$

Il polinomio caratteristico è dato da

$$p(\lambda) = (\lambda + 2)^2$$

ed il sistema ha pertanto due poli coincidenti dati da

$$\lambda = -2 .$$

Il sistema risulta quindi stabile asintoticamente, i.l.s.l. ed i.l.u.l.

3) La funzione di trasferimento,  $G(s)$ , che lega la  $\mathcal{L}$ -trasformata della funzione di ingresso a quella della risposta è

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B .$$

Per i sistemi a singolo ingresso e singola uscita la  $G(s)$  è data dal rapporto di due polinomi in  $s$ ; negli altri casi è una matrice i cui elementi sono rapporti di polinomi in  $s$ . La funzione di trasferimento può essere definita anche nel dominio dei tempi considerando  $s$  come operatore differenziale ( $sf(t) = \dot{f}(t)$ ). In tale caso la funzione (matrice) di trasferimento fornisce un insieme di equazioni differenziali che legano le varie uscite ai vari ingressi. Tali equazioni, di ordine in genere maggiore di uno, descrivono solo la parte raggiungibile ed osservabile del sistema. Per il sistema in esame risulta

$$\begin{aligned} G(s) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s + 1/RC & 1/RC \\ 0 & s + 1/RC \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -1/RC \\ -1/RC \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s + 1/RC & -1/RC \\ 0 & s + 1/RC \end{bmatrix} \frac{1}{(s + 1/RC)^2} \begin{bmatrix} -1/RC \\ -1/RC \end{bmatrix} \\ &= -\frac{2}{RC} \frac{s + 1/2RC}{(s + 1/RC)^2} . \end{aligned}$$

Sostituendo  $j\omega$  ad  $s$  ed i valori assegnati ad  $R$  e  $C$  si ottiene la risposta frequenziale

$$G(j\omega) = -\frac{4}{(4 + \omega^2)^2} (4 + 3\omega^2 - j\omega^3)$$

il cui modulo, dato da

$$\|G(j\omega)\| = \frac{4}{(4 + \omega^2)^2} \sqrt{(4 + 3\omega^2)^2 + \omega^6} ,$$

ha l'andamento riportato in Figura 13.2.

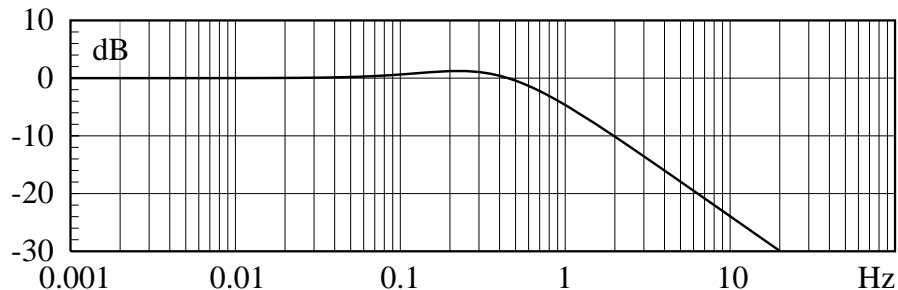


Fig. 13.2

Il sistema quindi si comporta essenzialmente come un filtro passa basso.