

Si consideri il circuito di Figura 15.1 realizzato con amplificatori operazionali che si suppongono ideali.

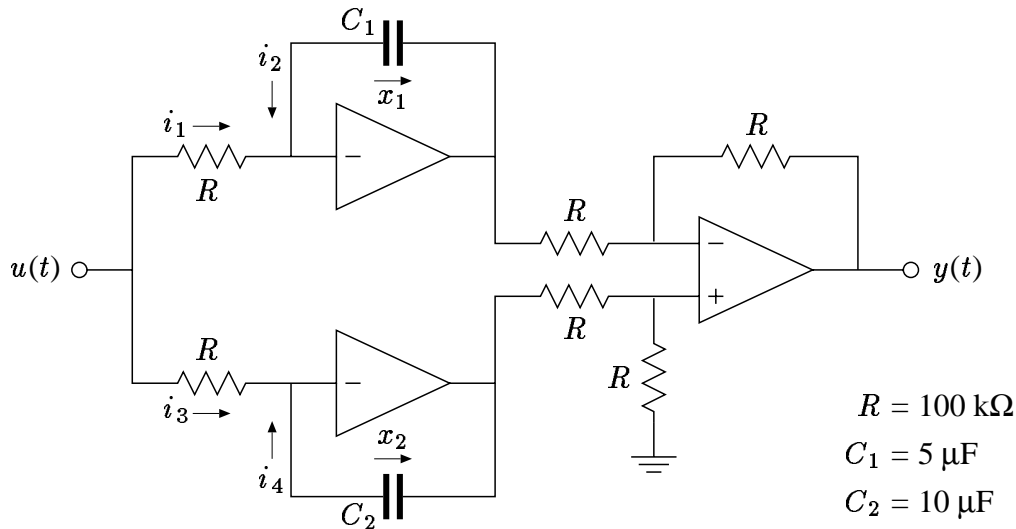


Fig. 15.1

Per tale sistema

- 1) Si determini un modello nello spazio degli stati;
- 2) Si valuti la stabilità;
- 3) Si calcoli la funzione di trasferimento.

SOLUZIONE

1) Il circuito assegnato è costituito da due integratori realizzati con amplificatori operazionali alimentati dallo stesso segnale di ingresso. Le loro uscite costituiscono gli ingressi di un terzo amplificatore operazionale la cui uscita è la loro differenza. Il sistema può quindi essere considerato come formato da due sottosistemi collegati in parallelo.

Essendo presenti due condensatori è naturale assumere come variabili di stato, $x_1(t)$ e $x_2(t)$, le tensioni ai loro capi. Indicando poi con i_1 ed i_2 le correnti nei due rami di ingresso e con i_3 ed i_4 quelle che attraversano i condensatori, si possono scrivere, nell'ipotesi di amplificatori operazionali ideali (corrente di ingresso nulla, guadagno infinito ed impedenza di uscita nulla), le seguenti relazioni

$$\begin{aligned}
 i_1 &= \frac{u}{R} \\
 i_2 &= -i_1 \\
 i_3 &= \frac{u}{R} \\
 i_4 &= -i_3 \\
 \dot{x}_1 &= \frac{1}{C_1} i_2 \\
 \dot{x}_2 &= \frac{1}{C_2} i_4 \\
 y &= -x_1 + x_2 .
 \end{aligned}$$

Eliminando le correnti dalle relazioni precedenti si ricavano le seguenti equazioni differenziali del prim'ordine

$$\begin{aligned}
 \frac{dx_1}{dt} &= -\frac{1}{RC_1} u \\
 \frac{dx_2}{dt} &= -\frac{1}{RC_2} u .
 \end{aligned}$$

Si è quindi ottenuto un modello nello spazio degli stati descritto dalle matrici

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & B &= \begin{bmatrix} -1/RC_1 \\ -1/RC_2 \end{bmatrix} \\
 C &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ & \end{bmatrix} .
 \end{aligned}$$

2) Sostituendo ad R , C_1 e C_2 i valori forniti dal testo dell'esercizio si ottiene

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & B &= \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix} \\
 C &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ & \end{bmatrix} .
 \end{aligned}$$

Il polinomio caratteristico è dato da

$$p(\lambda) = \lambda^2$$

ed il sistema ha pertanto due poli coincidenti nulli. L'unica stabilità possibile in un sistema con tutti i poli nulli è quella semplice; per valutare se il sistema

in esame sia semplicemente stabile si determinerà il polinomio minimo come rapporto tra il polinomio caratteristico ed il massimo comun divisore monico della matrice $\text{agg}(\lambda I - A)$ che è data da

$$\text{agg}(\lambda I - A) = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Il divisore cercato è uguale a λ , quindi anche il polinomio minimo è uguale a λ ed il sistema risulta semplicemente stabile.

3) La funzione di trasferimento del sistema in esame è data da

$$\begin{aligned} G(s) = C(sI - A)^{-1}B &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} \frac{1}{s^2} \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{s}. \end{aligned}$$

OSSERVAZIONI

a) Ognuno dei due blocchi che, collegati in parallelo, costituiscono il sistema, è formato da un integratore. Tali blocchi hanno quindi un singolo polo nell'origine e risultano semplicemente stabili; questa proprietà viene mantenuta nella loro connessione in parallelo. Si confronti tale risultato con quello dell'esercizio relativo a due integratori collegati in cascata ove si è verificata l'instabilità del sistema risultante e si generalizzi il risultato ottenuto. Si noti che la matrice di raggiungibilità del sistema in esame è data da

$$P = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Il sistema non è quindi completamente raggiungibile. La matrice di osservabilità è data da

$$Q = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e pertanto il sistema non è neppure completamente osservabile (in forma minima). Osservando la funzione di trasferimento ottenuta è immediato verificare l'equivalenza della connessione in parallelo considerata con un singolo integratore (non invertente) che può essere considerato una forma minima del sistema in esame.