

Si consideri lo schema di Figura 16.1 che riporta (a meno dei circuiti di polarizzazione) uno stadio amplificatore realizzato mediante un transistoro bipolare nella configurazione ad emettitore comune.

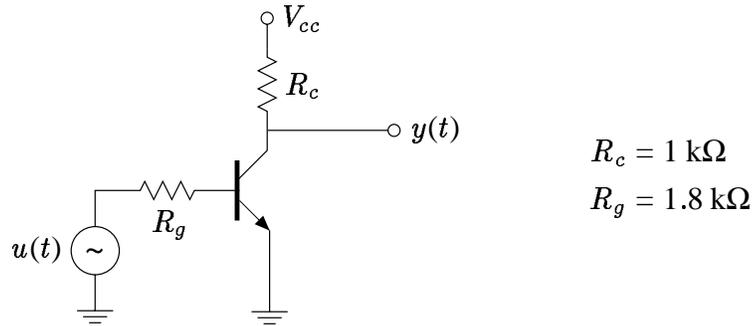


Fig. 16.1

Si faccia inoltre riferimento al circuito equivalente a  $\pi$  ibrido caratterizzato, nel punto di lavoro prescelto, dai valori riportati in Figura 16.2.

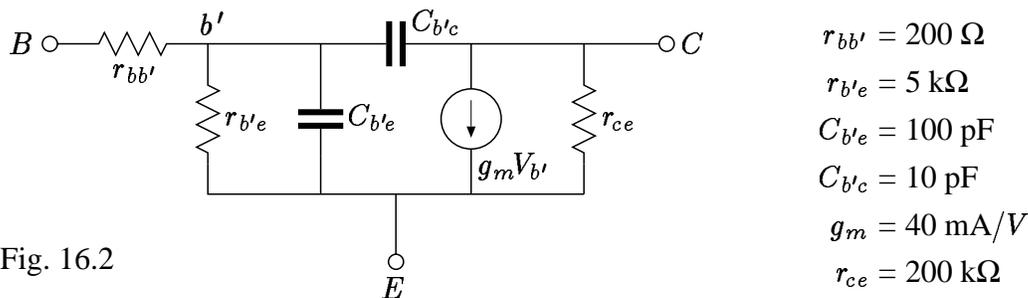


Fig. 16.2

Per tale sistema

- 1) Si determini un modello nello spazio degli stati assumendo come ingresso il segnale fornito dal generatore e come uscita la tensione sul collettore;
- 2) Si calcoli la funzione di trasferimento relativa al modello precedente, la risposta in frequenza ed in fase;
- 3) Si determini la risposta impulsiva, quella ad un gradino di ampiezza unitaria ed il tempo di salita.

### SOLUZIONE

- 1) Considerando i valori assegnati e passando ad una notazione più compatta si ottiene il circuito equivalente di Figura 16.3.

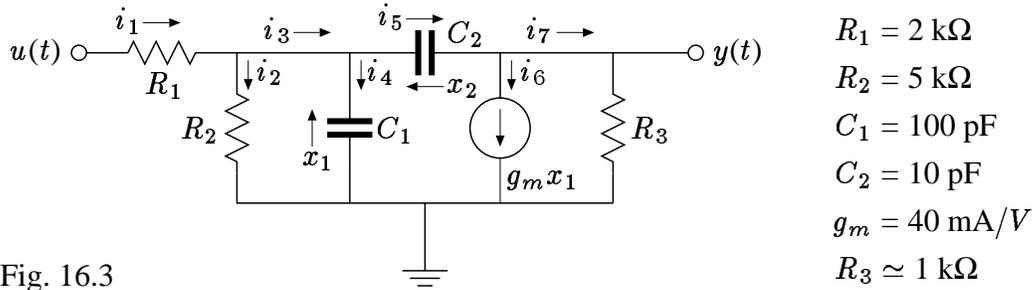


Fig. 16.3

Nel circuito precedente si sono indicate con  $i_1, \dots, i_7$  le correnti nei vari rami e con  $x_1$  ed  $x_2$  le tensioni ai capi dei due condensatori. Le relazioni che è immediatamente possibile scrivere sono le seguenti

$$\begin{aligned}
 i_1 &= \frac{u - x_1}{R_1} \\
 i_1 &= i_2 + i_3 \\
 i_2 &= \frac{x_1}{R_2} \\
 i_3 &= i_4 + i_5 \\
 i_4 &= C_1 \dot{x}_1 \\
 i_5 &= C_2 \dot{x}_2 \\
 i_5 &= i_6 + i_7 \\
 i_6 &= g_m x_1 \\
 i_7 &= \frac{x_1 - x_2}{R_3} \\
 y &= R_3 i_7 \quad .
 \end{aligned}$$

Assumendo come variabili di stato  $x_1$  ed  $x_2$  ed eliminando le correnti dalle relazioni precedenti si ottengono le seguenti equazioni

$$\begin{aligned}
 \frac{dx_1}{dt} &= -\frac{1}{C_1} \left( g_m + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) x_1 + \frac{1}{R_3 C_1} x_2 + \frac{1}{R_1 C_1} u \\
 \frac{dx_2}{dt} &= \frac{1}{C_2} \left( g_m + \frac{1}{R_3} \right) x_1 - \frac{1}{R_3 C_2} x_2 \\
 y &= x_1 - x_2 \quad .
 \end{aligned}$$

Il modello nello spazio degli stati cercato è quindi descritto dalla seguente terna di matrici

$$A = 10^7 \begin{bmatrix} -41.7 & 1 \\ 410 & -10 \end{bmatrix} \quad B = 10^6 \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} .$$

2) La funzione di trasferimento del sistema è data da

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \frac{\begin{bmatrix} (s + 10^8) & 10^7 \\ 4.1 \cdot 10^9 & (s + 4.17 \cdot 10^8) \end{bmatrix}}{s^2 + 5.17 \cdot 10^8 s + 7 \cdot 10^{14}} \begin{bmatrix} 5 \cdot 10^6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{(5s - 2 \cdot 10^{10}) 10^6}{s^2 + 5.17 \cdot 10^8 s + 7 \cdot 10^{14}} .$$

Sostituendo  $j\omega$  alla variabile complessa  $s$  si ottiene la risposta frequenziale

$$G(j\omega) = 10^6 \frac{(2.26 \cdot 10^{10} \omega^2 - 1.4 \cdot 10^{25}) + j(1.034 \cdot 10^{19} - 5\omega^2)\omega}{\omega^4 + 2.66 \cdot 10^{17} \omega^2 + 4.9 \cdot 10^{29}}$$

il cui modulo, dato da

$$10^6 \frac{\sqrt{(2.26 \cdot 10^{10} \omega^2 - 1.4 \cdot 10^{25})^2 + (1.034 \cdot 10^{19} - 5\omega^2)^2 \omega^2}}{\omega^4 + 2.66 \cdot 10^{17} \omega^2 + 4.9 \cdot 10^{29}} ,$$

ha l'andamento riportato, in dB, in Figura 16.4.

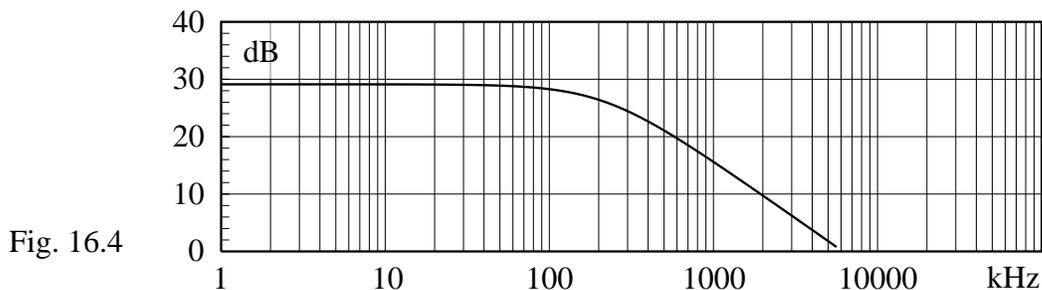


Fig. 16.4

L'argomento di  $G(j\omega)$  è dato da

$$\arg(G(j\omega)) = \text{arctg} \left( \frac{(1.034 \cdot 10^{19} - 5\omega^2)\omega}{2.26 \cdot 10^{10} \omega^2 - 1.4 \cdot 10^{25}} \right)$$

ed ha l'andamento riportato in Figura 16.5.

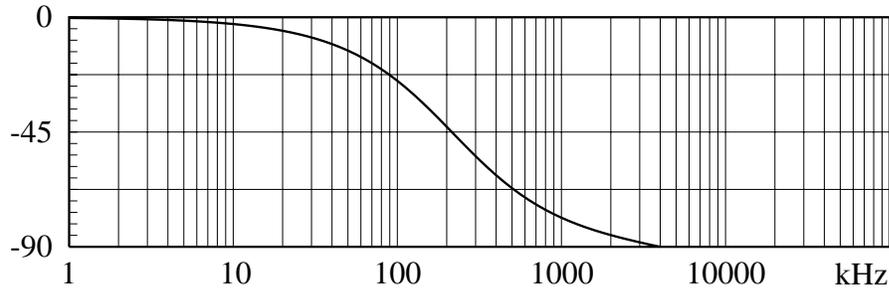


Fig. 16.5

3) La risposta all'impulso di Dirac applicato al tempo 0 è data da

$$W(t) = C e^{At} B .$$

È quindi necessario, per ottenere tale risposta, calcolare la matrice di transizione  $e^{At}$  che, nel caso in esame, può essere espressa nella forma

$$e^{At} = \alpha_0 I + \alpha_1 A$$

ove i coefficienti  $\alpha_0$  e  $\alpha_1$  possono essere calcolati mediante l'espressione

$$\begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 1 & \lambda_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix} .$$

Sostituendo a  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  i valori precedentemente calcolati si ottiene

$$\alpha_0 = 1.00264 e^{\lambda_1 t} - 0.00264 e^{\lambda_2 t}$$

$$\alpha_1 = 1.944 \cdot 10^{-9} e^{\lambda_1 t} - 1.944 \cdot 10^{-9} e^{\lambda_2 t}$$

$$\begin{aligned} W(t) &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 - 4.17 \cdot 10^8 \alpha_1 & 10^7 \alpha_1 \\ 4.1 \cdot 10^9 \alpha_1 & \alpha_0 - 10^8 \alpha_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \cdot 10^6 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= -3.89 \cdot 10^7 e^{\lambda_1 t} + 4.39 \cdot 10^7 e^{\lambda_2 t} . \end{aligned}$$

L'andamento nel tempo della risposta impulsiva è riportato in Figura 16.6.

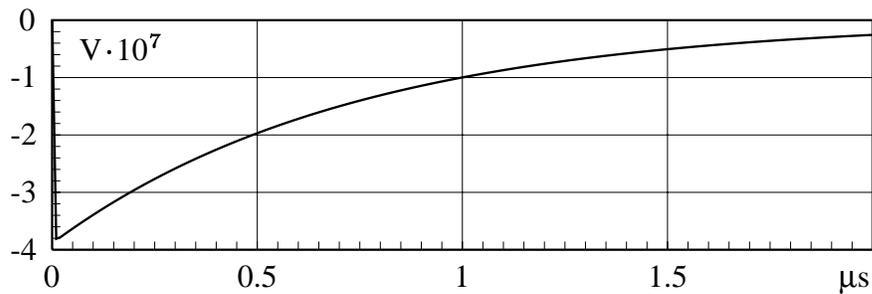


Fig. 16.6

La risposta ad un gradino di ampiezza unitaria può essere considerata come l'integrale della risposta all'impulso di Dirac. Tale risposta è quindi data da

$$y(t) = \int_0^t W(\tau) d\tau = -\frac{3.89 \cdot 10^7}{\lambda_1} e^{\lambda_1 t} + \frac{4.39 \cdot 10^7}{\lambda_2} e^{\lambda_2 t} + c$$

ove la costante  $c$  può essere ottenuta imponendo la condizione iniziale

$$y(0) = 0$$

che fornisce il valore

$$c = -28.571 .$$

Si ottiene quindi l'espressione

$$y(t) = -28.571 + 28.656 e^{\lambda_1 t} - 0.085 e^{\lambda_2 t}$$

che ha l'andamento riportato in Figura 16.7.

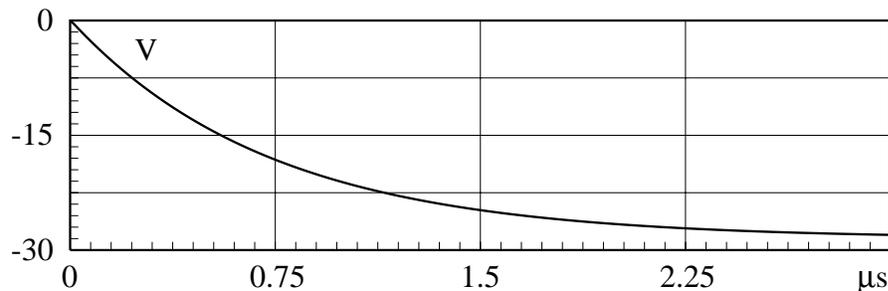


Fig. 16.7

Per ricavare il tempo di salita, definito come il tempo necessario perché la risposta al gradino passi dal 10% al 90% del valore di regime, sarà sufficiente porre

$$y(t_{10}) = -28.571 \cdot 0.1$$

$$y(t_{90}) = -28.571 \cdot 0.9$$

nell'espressione della risposta al gradino ricavando i corrispondenti valori del tempo dati da

$$t_{10} = 0.08 \mu\text{s}$$

$$t_{90} = 1.68 \mu\text{s} .$$

Ne segue che il tempo di salita è dato da

$$t_s = t_{90} - t_{10} = 1.60 \mu\text{s} .$$

## OSSERVAZIONI

a) Si noti che si è considerato un carico puramente resistivo. Qualora si fosse considerata anche una capacità di carico si sarebbe ottenuto un modello del terz'ordine. I poli del modello sono

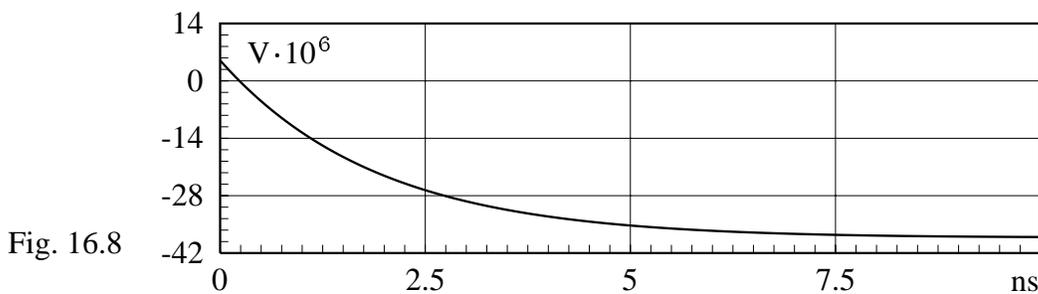
$$\lambda_1 = -1.35753 \cdot 10^6$$

$$\lambda_2 = -5.15642 \cdot 10^8 .$$

Il sistema è quindi asintoticamente stabile e la sua frequenza di taglio sarà determinata da  $\lambda_1$ .

b) La matrice di Vandermonde che si è invertita per determinare i coefficienti del polinomio interpolante utilizzato per il calcolo di  $e^{At}$  risulta, nel caso in esame, alquanto malcondizionata (il numero condizionante vale  $5.17 \cdot 10^8$ ). È necessario, in tali casi, effettuare i calcoli con un numero adeguato di cifre significative e controllare l'accuratezza dei risultati ottenuti.

Si noti che l'impulso di Dirac non è fisicamente realizzabile e, comunque, il circuito in esame non avrebbe un comportamento lineare in presenza di un tale ingresso. Si osservi, al riguardo, la scala adottata sul grafico che riporta la risposta impulsiva. L'andamento della risposta calcolata approssima tuttavia quella del circuito ad impulsi di ampiezza limitata e di durata finita purché trascurabile rispetto alle costanti di tempo del sistema. La scala adottata per l'asse dei tempi nel grafico della risposta impulsiva consente di valutare adeguatamente l'andamento complessivo, che si esaurisce in pochi microsecondi, ma comprime eccessivamente la parte iniziale della risposta. Espandendo la scala 200 volte per visualizzare meglio tale parte si ottiene il grafico riportato in Figura 16.8.



Si può così vedere come la risposta impulsiva non assuma all'istante iniziale valore nullo come ci si potrebbe aspettare considerando lo stato iniziale del sistema dato da  $x(0) = 0$ . Tale apparente anomalia è dovuta alle particolari caratteristiche dell'impulso di Dirac che, dal punto di vista matematico, non appartiene alla classe delle funzioni ma a quella delle distribuzioni e consente

la transizione istantanea dello stato di un sistema dinamico dal valore 0 ad un valore finito. L'espressione della risposta impulsiva mostra come lo stato al quale viene istantaneamente portato il sistema coincida con la matrice  $B$  nei sistemi ad ingresso singolo (come quello in esame) o, più in generale, con la colonna di  $B$  corrispondente all'ingresso al quale è stato applicato l'impulso. Essendo l'impulso di Dirac identicamente nullo per ogni valore di  $t > 0$ , l'intera risposta impulsiva non è altro che la risposta libera del sistema a partire dallo stato iniziale al quale il sistema è stato portato. Nel caso in esame tale stato iniziale è

$$x(0) = \begin{bmatrix} 5 \cdot 10^6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e, conseguentemente, il valore iniziale della risposta è dato da

$$y(0) = C x(0) = 5 \cdot 10^6 .$$

I due modi del sistema in esame, entrambi asintoticamente stabili, sono associati a poli molto diversi. Il modo associato a  $\lambda_2$  determina la rapida variazione iniziale della risposta impulsiva, della durata di qualche nanosecondo; quello associato a  $\lambda_1$  determina invece la fase successiva della risposta, della durata di pochi microsecondi.

Si noti infine che la conoscenza della risposta impulsiva consente di determinare la risposta di un sistema, a partire dallo stato zero, a qualunque funzione di ingresso tramite l'integrale di convoluzione

$$y(t) = \int_0^t W(t - \tau) u(\tau) d\tau .$$

Tale espressione viene talvolta utilizzata per determinare la risposta di un sistema sulla base della sola misura della risposta impulsiva rilevata sperimentalmente. Ciò risulta particolarmente vantaggioso per i sistemi a parametri distribuiti che darebbero luogo a modelli nello spazio degli stati di dimensione infinita.