22 Diffusione di un'epidemia

Si consideri il processo di diffusione di una epidemia nell'ambito di una popolazione. Indicando con $x_1(t)$ il numero di individui non immunizzati (attraverso vaccinazione o per avere superato la malattia) al tempo t e con $x_2(t)$ il numero di individui ammalati ed in grado di trasmettere la malattia, la propagazione del contagio è descritta da un modello non lineare del tipo

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = -\alpha\, x_1 x_2 - u$$
$$\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} = \alpha\, x_1 x_2 - \beta\, x_2$$

ove α è un parametro che tiene conto della probabilità di trasmissione della malattia tra individui ammalati e individui non immunizzati, β è un parametro legato alla durata media della malattia e l'ingresso u è costituito dal numero di individui che vengono vaccinati nell'unità di tempo.

1) Considerando una comunità di 10000 persone nella quale siano inizialmente presenti 10 ammalati e 9990 persone non immunizzate si determini il numero massimo di individui contemporaneamente ammalati durante l'evolversi dell'epidemia assumendo $\alpha = 0.00001$, $\beta = 0.04$ e che non esista alcun vaccino efficace per la malattia;

2) Nelle condizioni della domanda precedente si determini il numero totale di individui che si sono ammalati durante l'intero corso dell'epidemia;

3) Si studi sotto quali condizioni la malattia può diventare endemica.

SOLUZIONE

1) Il modello del processo non consente alcuna linearizzazione utile nella soluzione delle domande poste. Pur non essendo agevole determinare per via analitica l'andamento del moto è tuttavia possibile ottenere informazioni sulle traiettorie che sono descritte dalla equazione differenziale

$$\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}x_1} = -\frac{\alpha\, x_2(x_1 - \beta/\alpha)}{\alpha\, x_1 x_2} = -\frac{x_1 - \beta/\alpha}{x_1} \; .$$

Dall'esame di tale equazione si nota che quando $x_1 = \beta/\alpha$ risulta $\mathrm{d}x_2/\mathrm{d}x_1 = 0$ e le traiettorie hanno tangente orrizontale. Inoltre le equazioni di stato mostrano che per $x_1(0) > 0$ e $x_2(0) > 0$ (come nel caso in esame) risulta $\mathrm{d}x_1/\mathrm{d}t < 0$. Per $0 < x_1 \leq \beta/\alpha$ risulta poi $\mathrm{d}x_2/\mathrm{d}t < 0$ mentre per $x_1 \geq \beta/\alpha$ risulta $\mathrm{d}x_2/\mathrm{d}t > 0$. L'andamento delle traiettorie è quindi del tipo riportato in Figura 22.1.

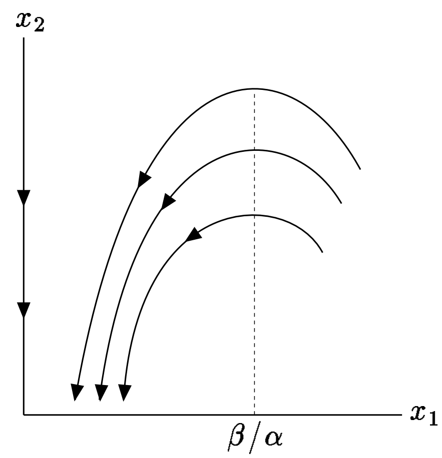

Fig. 22.1

La massima diffusione dell'epidemia (valore massimo di x_2) si ha in corrispondenza di $x_1 = \beta/\alpha$. Per $x_2 \to 0$ (esaurimento dell'epidemia) x_1 tende ad un valore compreso tra 0 e β/α.

Per determinare il valore massimo di x_2 occorre integrare l'equazione differenziale che descrive le traiettorie. Si ottiene

$$x_2(t) = -x_1(t) + \frac{\beta}{\alpha} \ln\big(x_1(t)\big) + c$$

ove la costante di integrazione c può essere determinata imponendo che la soluzione soddisfi le condizioni iniziali $x_1(0) = 9990$, $x_2(0) = 10$. Risulta

$$c = x_2(0) + x_1(0) - \frac{\beta}{\alpha} \ln\big(x_1(0)\big) = 10000 - 4000 \ln(9990) \ .$$

La traiettoria corrispondente alle condizioni iniziali assegnate è quindi descritta dalla equazione

$$x_2(t) = 10000 + 4000 \ln\left(\frac{x_1(t)}{9990}\right) - x_1(t) \ .$$

Il massimo numero di persone contemporaneamente ammalate si ottiene ponendo $x_1(t) = \beta/\alpha = 4000$ nell'espressione precedente. Risulta

$$x_{2\,max} = 10000 - 3661 - 4000 = 2339 \ .$$

2) Dall'andamento qualitativo delle traiettorie si vede come al termine dell'epidemia ($x_2 = 0$) vi sia un numero residuo di persone non contagiate compreso

tra 0 e β/α. Ponendo $x_2 = 0$ nell'espressione della traiettoria corrispondente ai dati del problema si ottiene la relazione non lineare

$$10000 + 4000 \ln\left(\frac{x_1}{9990}\right) - x_1 = 0$$

che risolta per tentativi fornisce il valore (arrotondato all'intero più vicino)

$$x_1 = 1072 \ .$$

Il numero totale di persone colpite dalla epidemia nel suo intero corso è quindi pari a $10000 - 1072 = 8928$.

3) La fase endemica di una malattia corrisponde ad uno stato di equilibrio del modello che la descrive. Imponendo, nel modello assegnato, che il numero di ammalati non subisca variazioni nel tempo ($\dot{x}_2 = 0$) si ottiene la condizione

$$x_1(t) = \frac{\beta}{\alpha} \ .$$

Se tale valore viene posto nella prima equazione si ottiene tuttavia, escludendo il caso banale in cui sia $x_2(t) = 0$, una derivata non nulla per x_1 risultando

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = -\beta\, x_2 < 0$$

come si può dedurre anche dall'andamento delle traiettorie riportate in precedenza. Una malattia con le caratteristiche considerate non può pertanto diventare endemica nell'ambito di una comunità chiusa.

OSSERVAZIONI

a) Si noti che la risposta alle domande è stata determinata calcolando una traiettoria e non un moto. Non si è quindi ottenuta alcuna informazione sulla durata della epidemia nè sul tempo al quale si verifica la fase più acuta.