

7 Servomeccanismi di posizione e velocità

Si consideri un motore in corrente continua controllato sull'armatura e con l'avvolgimento di campo alimentato a tensione costante. Sull'asse del motore è presente, oltre al carico inerziale, una coppia resistente dovuta all'attrito dei cuscinetti ed alle perdite di ventilazione (proporzionale, in prima approssimazione, alla velocità di rotazione) ed una coppia di carico C_c . I parametri sono riportati in Figura 7.1.

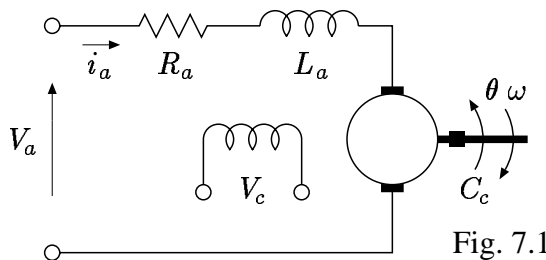


Fig. 7.1

$$\begin{aligned}
 R_a &= 0.30 \, \Omega \\
 L_a &= 0.025 \, \text{H} \\
 k_m &= 1 \, \text{N} \cdot \text{m}/\text{A} \\
 J &= 2 \, \text{kg} \cdot \text{m}^2 \\
 f &= 2 \cdot 10^{-3} \, \text{N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}/\text{rad}
 \end{aligned}$$

Si assumano come ingressi del sistema la tensione di alimentazione dell'armatura, V_a e la coppia assorbita dal carico, C_c . Si considerino come uscite la rotazione dell'asse, θ , e la velocità di rotazione, ω .

- 1) Si determini un modello nello spazio degli stati per tale sistema;
- 2) Si studi una retroazione uscita–ingresso che trasformi il sistema in un servomeccanismo di posizione;
- 3) Si studi una retroazione uscita–ingresso che trasformi il sistema in un servomeccanismo di velocità.

SOLUZIONE

1) Il sistema considerato è descritto dalle equazioni relative alla sua parte elettrica (circuito di armatura) ed a quella meccanica. Per il circuito di armatura si scriverà l'equazione di equilibrio tra la tensione di alimentazione, V_a , le cadute di tensione dovute alla resistenza ed alla induttanza del circuito e la forza contro-elettromotrice che è proporzionale al flusso al traferro (costante nel caso in esame) ed alla velocità di rotazione. Risulta pertanto

$$V_a = L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a + k_m \omega .$$

La parte meccanica è descritta dall'equazione di equilibrio tra la coppia motrice, C_m , e la somma delle coppie resistenti, C_r

$$C_m = C_r$$

ove

$$C_m = k_m i_a$$

$$C_r = J \frac{d\omega}{dt} + f\omega + C_c .$$

Una ulteriore relazione che occorre considerare, essendo richiesta come uscita anche la rotazione dell'asse, è quella che lega tale rotazione alla velocità angolare ossia

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega .$$

La scelta degli ingressi del modello è già stata indicata dal testo dell'esercizio ($u_1 = V_a$, $u_2 = C_c$) e lo stesso vale per le uscite ($y_1 = \theta$, $y_2 = \omega$); restano da scegliere le variabili di stato del modello. Essendo le caratteristiche dinamiche del sistema legate al comportamento di un circuito induttivo e di una massa in rotazione si potranno assumere come variabili di stato la corrente in tale circuito, la rotazione e la velocità di rotazione dell'asse del motore ($x_1 = i_a$, $x_2 = \theta$, $x_3 = \omega$). Con tale scelta il modello è descritto dalle equazioni

$$\dot{x}(t) = A x(t) + B u(t)$$

$$y(t) = C x(t)$$

ove

$$A = \begin{bmatrix} -R_a/L_a & 0 & -k_m/L_a \\ 0 & 0 & 1 \\ k_m/J & 0 & -f/J \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1/L_a & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1/J \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

I valori assegnati per i parametri del sistema danno quindi la seguente terna di matrici

$$A = \begin{bmatrix} -12 & 0 & -40 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0.5 & 0 & -10^{-3} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 40 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -0.5 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

2) Un servomeccanismo di posizione è un dispositivo in grado di controllare la posizione di un carico in funzione di un segnale di ingresso. In genere tali servomeccanismi vengono realizzati utilizzando un attuttore di potenza che può essere, ad esempio, elettrico, idraulico, pneumatico, ed un trasduttore in grado di rilevare la posizione del carico. Il segnale di uscita del trasduttore viene poi

confrontato con il segnale di controllo e la loro differenza utilizzata per agire (dopo adeguata amplificazione del livello di potenza) sull'attuatore in modo da portare la posizione del carico al valore desiderato. Il tipo di trasduttore più idoneo dipenderà dalla natura dell'attuatore e dal grado di precisione richiesta. Nel caso in esame l'attuatore è un motore in corrente continua pilotato sull'armatura del quale si desidera controllare la rotazione dell'asse. Il trasduttore più naturale è pertanto costituito da un potenziometro lineare a presa centrale alimentato simmetricamente dalle tensioni continue V_p e $-V_p$ che darà luogo ad una tensione di uscita proporzionale alla rotazione del suo asse rispetto alla posizione centrale

$$V_t = k V_p \theta = k_p \theta .$$

Si effettuerà quindi la retroazione uscita-ingresso descritta dalla relazione

$$u_1 = V_r - V_t = V_r - k_p \theta$$

ove V_r indica la tensione di riferimento (nuovo ingresso del sistema) che determina la rotazione desiderata per l'asse del motore. L'operazione effettuata consiste quindi in una retroazione uscita-ingresso del tipo

$$u(t) = v(t) + K y(t)$$

ove $u(t)$ è l'ingresso del modello precedentemente determinato, $v(t)$ è il nuovo vettore di ingresso di componenti $v_1 = V_r$ e $v_2 = u_2 = C_c$ e K è la matrice di retroazione data da

$$K = \begin{bmatrix} -k_p & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

Sostituendo l'espressione trovata per $u(t)$ nel modello del sistema si ottiene il nuovo modello

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= (A + BKC) x(t) + B v(t) \\ y(t) &= C x(t) \end{aligned}$$

ove la matrice dinamica è data da

$$\begin{aligned} A' = A + BKC &= \begin{bmatrix} -R_a/L_a & -k_p/L_a & -k_m/L_a \\ 0 & 0 & 1 \\ k_m/J & 0 & -f/J \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -12 & -40k_p & -40 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0.5 & 0 & -10^{-3} \end{bmatrix} . \end{aligned}$$

Il polinomio caratteristico è ora dato, trascurando l'attrito, da

$$p(\lambda) = \lambda^3 + 12\lambda^2 + 20\lambda + 20k_p .$$

Ricordando che affinché le radici di un polinomio siano a parte reale negativa è necessario (ma non sufficiente) che non vi siano variazioni nei segni dei coefficienti, si deduce immediatamente che per la stabilità asintotica ed i.l.u.l. del sistema retroazionato è necessario che sia $k_p > 0$; diversamente la tensione di errore fornita dal potenziometro si sommerebbe alla tensione di riferimento con conseguente comportamento instabile.

3) Un servomeccanismo di velocità è un dispositivo in grado di controllare la velocità di un carico in funzione di un segnale di ingresso. Analogamente al caso dei servomeccanismi di posizione tali dispositivi sono in genere basati sulla retroazione della misura di velocità effettuata da un apposito trasduttore scelto in base all'attuatore impiegato ed alla precisione richiesta. Nel caso in esame si potrà utilmente impiegare una dinamo tachimetrica che genera una tensione proporzionale alla velocità di rotazione del suo asse

$$V_t = k_t \omega .$$

Si effettuerà quindi la retroazione uscita–ingresso descritta dalla relazione

$$u_1 = V_r - V_t = V_r - k_t \omega$$

ove V_r indica la tensione di riferimento (nuovo ingresso del sistema) che determina la velocità di rotazione desiderata. Anche in questo caso l'ingresso del sistema è espresso da una relazione del tipo

$$u(t) = v(t) + K y(t)$$

ove $u(t)$ è l'ingresso del modello precedentemente determinato, $v(t)$ è il nuovo vettore di ingresso di componenti $v_1 = V_r$ e $v_2 = u_2 = C_c$ e K è la matrice di retroazione data da

$$K = \begin{bmatrix} 0 & -k_t \\ 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

Sostituendo l'espressione trovata per $u(t)$ nel modello del sistema si ottiene il nuovo modello

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= (A + BKC) x(t) + Bv(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned}$$

ove la matrice dinamica è data da

$$A' = A + BKC = \begin{bmatrix} -R_a/L_a & 0 & -(k_m + k_t)/L_a \\ 0 & 0 & 1 \\ k_m/J & 0 & -f/J \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} -12 & 0 & -40(1 + k_t) \\ 0 & 0 & 1 \\ 0.5 & 0 & -10^{-3} \end{bmatrix} .$$

Il polinomio caratteristico è ora dato, trascurando l'attrito, da

$$p(\lambda) = \lambda^3 + 12\lambda^2 + 20(1 + k_t)\lambda .$$

OSSERVAZIONI

a) La scelta effettuata per le variabili di stato presenta il vantaggio di associare ad esse un ben preciso significato fisico e di portare ad un modello i cui parametri sono direttamente legati alle caratteristiche elettromeccaniche del sistema. Si noti che il modello ottenuto è di ordine tre solo perché la rotazione dell'asse è richiesta come variabile di uscita. Ciò ha richiesto l'introduzione dell'equazione differenziale $\dot{\theta} = \omega$ nel modello con conseguente incremento dell'ordine da due a tre. Si può inoltre osservare che la presenza di attrito viscoso sull'asse rende non nullo l'elemento a_{33} della matrice dinamica. Questo elemento ha tuttavia un valore molto minore dei rimanenti elementi non nulli ed è lecito chiedersi se sia ragionevole l'entità della approssimazione introdotta considerando nullo a_{33} . In casi simili può essere utile valutare la perturbazione introdotta sui poli del modello dall'approssimazione considerata. Il polinomio caratteristico della matrice dinamica del modello ottenuto è dato da

$$p(\lambda) = \lambda^3 + 12.001\lambda^2 + 20.012\lambda$$

e le sue radici sono $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -2.00125$, $\lambda_3 = -9.99975$. Trascurando l'attrito viscoso si ottiene un polinomio caratteristico dato da

$$p(\lambda) = \lambda^3 + 12\lambda^2 + 20\lambda$$

le cui radici sono $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = -10$. Dal confronto precedente appare giustificata la prassi comune di trascurare la coppia resistente dovuta agli attriti. È agevole verificare la completa raggiungibilità ed osservabilità del sistema in esame; risulta infatti $\mathcal{R}^+(0) = \mathcal{X}$ ed $\mathcal{E}^-(0,0) = \{\emptyset\}$. Il sistema non è pertanto

stabile né asintoticamente né i.l.u.l. mentre lo è semplicemente. Si osservi che la mancata stabilità asintotica ed i.l.u.l. è esclusivamente legata alla presenza, come variabile di stato e come uscita, della rotazione del motore. Infatti se si parte dallo stato zero e si alimenta per un certo tempo il motore si ottiene una rotazione che non torna a zero quando l'alimentazione viene tolta; non si ha dunque stabilità i.l.u.l. come indicato dal polo nullo.

È importante osservare che la linearità o meno di un sistema può essere legata alla scelta degli ingressi e delle uscite. Nel caso in esame, ad esempio, la linearità del modello è dovuta alla alimentazione con tensione costante dell'avvolgimento di campo. Qualora tale tensione costituisca un ingresso del sistema occorrerà innanzitutto considerare, nella costruzione del modello, anche l'equazione che descrive il comportamento dinamico del circuito di campo, data da

$$V_c = L_c \frac{di_c}{dt} + R_c i_c$$

ove V_c , L_c , R_c ed i_c denotano, rispettivamente, la tensione di alimentazione, l'induttanza, la resistenza e la corrente in tale circuito. Occorre pertanto aggiungere la nuova variabile di stato i_c alle precedenti. Inoltre i legami tra coppia motrice e corrente di armatura e tra forza controelettrica e velocità di rotazione vengono ora a dipendere dalla corrente di campo essendo $k_m = k\phi = k_c i_c$ (ϕ = flusso al traferro). L'equazione del circuito di armatura e l'espressione della coppia motrice diventano quindi

$$V_a = L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a + k_c i_c \omega$$

$$C_m = k_c i_c i_a$$

ed il modello nello spazio degli stati, aggiungendo la variabile di stato $x_4 = i_c$ e l'ingresso $u_3 = V_c$, diventa

$$\dot{x}_1 = -(R_a/L_a) x_1 - (k_c/L_a) x_3 x_4 + (1/L_a) u_1$$

$$\dot{x}_2 = x_3$$

$$\dot{x}_3 = (k_c/J) x_1 x_4 - (f/J) x_3 - u_2/J$$

$$\dot{x}_4 = -(R_c/L_c) x_4 + (1/L_c) u_3 \quad .$$

La presenza di prodotti tra variabili di stato rende questo modello non lineare.

b) Il livello di potenza dell'uscita del trasduttore di posizione e del segnale di riferimento è, in genere, molto inferiore a quello necessario al pilotaggio del motore. Tra tali segnali ed il circuito di armatura è interposto un amplificatore

di potenza che può avere un guadagno di tensione, k_a , non unitario. È molto semplice verificare che per introdurre nel modello tale guadagno è sufficiente moltiplicare per k_a l'elemento a_{12} della matrice dinamica A' e l'elemento b_{11} della matrice di distribuzione degli ingressi B .

Si è già osservato che un coefficiente del polinomio caratteristico della matrice dinamica dipende da k_p , a sua volta legato alla tensione di alimentazione, V_p , del potenziometro. Ne segue che anche i poli del sistema dipendono da V_p ; attribuendo a k_p i valori 1, 10 e 12 si ottengono (trascurando l'attrito) i seguenti valori

$$\begin{array}{lll} k_p = 1 & k_p = 10 & k_p = 12 \\ \lambda_1 = -0.881 + j 1.085 & \lambda_1 = -0.127 + j 4.124 & \lambda_1 = j 4.472 \\ \lambda_2 = -0.881 - j 1.085 & \lambda_2 = -0.127 - j 4.124 & \lambda_2 = -j 4.472 \\ \lambda_3 = -10.237 & \lambda_3 = -11.747 & \lambda_3 = -12 . \end{array}$$

Per valori superiori di k_p si ottiene una coppia di poli nel semipiano destro ed il sistema risulta instabile. Il valore a regime dello stato del sistema per un assegnato ingresso si ottiene agevolmente dalla condizione $\dot{x} = 0$ dalla quale segue

$$x_r = -A'^{-1}B v$$

e, ricordando che $x_1 = i_a$, $x_2 = \theta$ e $x_3 = \omega$, si ottiene

$$\begin{aligned} i_{ar} &= \frac{1}{k_m} C_c \\ \theta_r &= \frac{1}{k_p} V_r - \frac{R_a}{k_m k_p} C_c \\ \omega_r &= 0 . \end{aligned}$$

Il valore di regime della velocità è nullo mentre la rotazione dell'asse del motore è proporzionale alla tensione di riferimento con un errore proporzionale al carico ed inversamente proporzionale a k_p . La scelta di k_p sarà dunque un compromesso tra la stabilità del sistema ed il massimo errore a regime tollerabile. Si noti che le caratteristiche del sistema peggiorano all'aumentare di R_a e che la corrente a regime non è nulla dovendo il motore bilanciare la coppia di carico C_c .

c) Anche nel caso del servomeccanismo di velocità sarà presente un amplificatore di potenza per pilotare il circuito di armatura. Il guadagno di tensione, k_a , di tale amplificatore modifica l'elemento a_{13} della matrice dinamica A' che diventa $-(k_m + k_t k_a)/L_a$ e l'elemento b_{11} della matrice di distribuzione degli ingressi B

che viene moltiplicato per k_a . Calcolando la matrice di trasferimento che lega la \mathcal{L} -trasformata della velocità angolare a quelle degli ingressi si trova (trascurando l'attrito ed indicando con c_2 la seconda riga di C)

$$G_2(s) = c_2(sI - A')^{-1}B = \left[\begin{array}{c} \frac{20k_a}{s^2 + 12s + 20(1 + k_t k_a)} \quad \frac{-0.5(s + 12)}{s^2 + 12s + 20(1 + k_t k_a)} \end{array} \right]$$

con poli dati da

$$p_{1,2} = -6 \pm \sqrt{16 - 20k_t k_a} .$$

Il valore di regime della velocità per un ingresso costante può essere ottenuto dal modello nello spazio degli stati annullando \dot{x}_1 e \dot{x}_3 o direttamente da $G_2(s)$ ponendo $s = 0$; si ottiene

$$\omega_r = \frac{k_a}{(k_m + k_t k_a)} V_r - \frac{R_a}{k_m(k_m + k_t k_a)} C_c .$$

L'espressione precedente mostra che l'errore introdotto dalla coppia di carico è proporzionale ad R_a e inversamente proporzionale a $k_m(k_m + k_t k_a)$. L'unico parametro sul quale è possibile agire è k_a ; tale parametro influenza, come si è visto, il valore dei poli quindi sia la stabilità che la prontezza del sistema. Calcolando i poli in funzione di $k_t k_a$ si ottiene il grafico riportato in Figura 7.2.

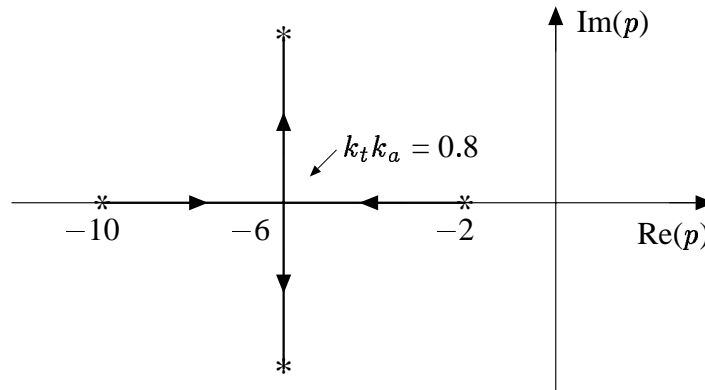


Fig. 7.2

Per $k_t k_a = 0$ i poli assumono i valori -2 e -10 ; al crescere di $k_t k_a$ confluiscono al valore -6 che raggiungono per $k_t k_a = 0.8$. Valori superiori danno luogo ad una coppia di poli complessi coniugati con parte reale eguale a -6 . Un sistema è tanto più pronto quanto più i suoi poli distano dall'asse immaginario; $k_t k_a = 0.8$ è quindi il valore oltre il quale non si ottiene alcun miglioramento delle prestazioni dinamiche del sistema e che assicura transitori privi di oscillazioni. Valori superiori potrebbero essere giustificati solo dalla necessità di ridurre la variazione di velocità dovuta alla coppia di carico.