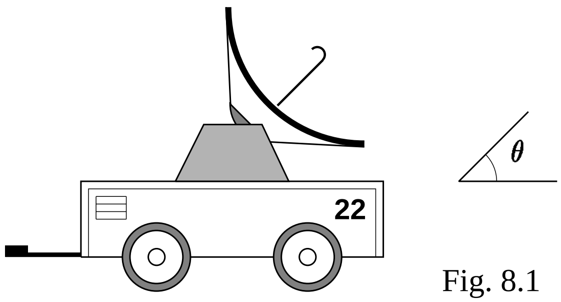
8 Controllo di un'antenna

L'antenna parabolica di un radar mobile è montata in modo da consentire una elevazione compresa tra 0 e $\pi/2$. Il momento d'inerzia dell'antenna, J_e, ed il coefficiente di attrito viscoso, f_e, che caratterizzano il sistema sono riportati in Figura 8.1.



J_e = 20 kg·m^2
f_e = 240 N·m·s/rad

Fig. 8.1

L'elevazione dell'antenna è controllata da un servomeccanismo di posizione che utilizza come attuatore un motore in corrente continua controllato sull'armatura e come trasduttore di rotazione un potenziometro. Le caratteristiche di tali componenti sono

motore: V_{nom} = 260 V
R_a = 0.30 Ω
k_m = 1.20 N·m/A

potenziometro: k_t = 6 V/rad

La tensione fornita dal potenziometro viene sottratta alla tensione di riferimento (ingresso del sistema) ed inviata ad un amplificatore di potenza con guadagno di tensione pari a k_a la cui uscita è applicata al circuito di armatura del motore che opera sull'antenna tramite un riduttore con rapporto 10 : 1.

1) Si ottimizzi il guadagno k_a dell'amplificatore rispetto alla prontezza del dispositivo;

2) Si verifichi l'adeguatezza del motore impiegato;

3) Si studi il comportamento dinamico del sistema.

SOLUZIONE

1) Il meccanismo di elevazione dell'antenna è costituito da una massa soggetta ad attrito viscoso che ruota attorno ad un asse sotto l'azione della coppia fornita dal motore attraverso un riduttore. Si scriverà pertanto l'equazione di equilibrio delle coppie data da

$$C_m = J_e \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} + f_e \, \omega \ .$$

La coppia motrice, trascurando l'induttanza del circuito di armatura che non è fornita dal testo dell'esercizio, è legata all'ingresso del sistema, costituito dalla tensione di riferimento V_r, ed alla tensione fornita dal trasduttore di posizione, $V_t = k_t \, \theta$, dalle seguenti relazioni

$$C_m = k_{me} \, i_a$$

$$i_a = \frac{V_a - k_{me}\,\omega}{R_a} = \frac{k_a\,(V_r - k_t\,\theta) - k_{me}\,\omega}{R_a} \ .$$

Scegliendo come prima variabile di stato l'elevazione dell'antenna ($x_1(t) = \theta(t)$) e come seconda la velocità di rotazione ($x_2(t) = \omega(t)$) si ottengono le due equazioni differenziali del prim'ordine

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{k_a\,k_{me}\,k_t}{R_a\,J_e}\,x_1 - \left(\frac{f_e}{J_e} + \frac{k_{me}^2}{R_a\,J_e}\right)x_2 + \frac{k_a\,k_{me}}{R_a\,J_e}\,V_r \ . \end{aligned}$$

Considerando come uscita del sistema l'elevazione dell'antenna ($y(t) = x_1(t)$), si ha quindi il modello nello spazio degli stati descritto dalla terna di matrici

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{k_a\,k_{me}\,k_t}{R_a\,J_e} & -\left(\dfrac{f_e}{J_e} + \dfrac{k_{me}^2}{R_a\,J_e}\right) \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{k_a\,k_{me}}{R_a\,J_e} \end{bmatrix}$$
$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \ .$$

L'unico parametro non ancora determinato presente nel modello è il guadagno, k_a, dell'amplificatore. Occorre anche ricordare che, essendo presente un riduttore con rapporto 10 : 1 sull'asse del motore, la costante di coppia del motore assume (considerando la rotazione all'uscita del riduttore) il valore $k_{me} = 10\,k_m$. Si ottiene quindi la seguente terna

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -12\,k_a & -36 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2\,k_a \end{bmatrix}$$
$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \ .$$

Il polinomio caratteristico è dato da

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 36\,\lambda + 12\,k_a$$

ed i poli sono

$$\lambda_{1,2} = -18 \pm \sqrt{324 - 12\,k_a}\ .$$

Calcolando i poli in funzione di k_a si ottiene il grafico riportato in Figura 8.2.

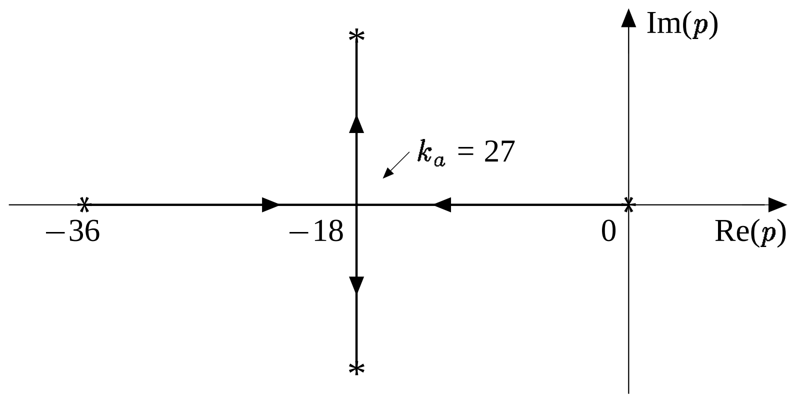


Fig. 8.2

Per $k_a = 0$ risulta $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -36$; per valori crescenti di k_a il primo polo cresce ed il secondo diminuisce finché, per $k_a = 324/12 = 27$, si ha $\lambda_1 = \lambda_2 = -18$. Per valori di k_a maggiori di 27 si ha una coppia di poli complessi e coniugati con parte reale uguale a -18 e con parte immaginaria che cresce con k_a. Il comportamento transitorio del sistema è, come noto, legato all'evoluzione nel tempo dei modi. Tale evoluzione tende a zero tanto più rapidamente quanto più i corrispondenti autovalori distano dall'asse immaginario. La massima distanza viene raggiunta, nel caso in esame, per $k_a = 27$; valori maggiori di k_a non aumentano la distanza degli autovalori dall'asse immaginario ma introducono una parte immaginaria cui corrisponde una oscillazione smorzata nel transitorio senza alcun miglioramento (o peggioramento) nella durata del transitorio stesso. Si assumerà pertanto, per l'amplificatore, il guadagno

$$k_a = 27\ .$$

2) Per verificare l'adeguatezza del motore occorre ora valutare se venga superata, in particolari condizioni di funzionamento, la tensione nominale ($260\,V$) dello stesso. I calcoli svolti assumono infatti una crescita lineare della coppia con la corrente di armatura ma questo è vero solo se non hanno luogo fenomeni di saturazione che vengono evitati se non si supera la tensione di alimentazione nominale. La massima elevazione dell'antenna è pari a $\pi/2$ ed il valore

dell'ingresso necessario per ottenere tale elevazione è $u_{max} = k_t \cdot \pi/2$. Se tale ingresso massimo viene applicato quando l'elevazione è nulla si ottiene la massima tensione errore $V_{e\,max} = u_{max}$ che, moltiplicata per k_a, viene infine applicata al motore. Si ha pertanto

$$V_{a\,max} = k_a V_{e\,max} = 27 \cdot 6 \cdot \frac{\pi}{2} = 254.47\ V\ .$$

Tale valore è inferiore alla tensione nominale del motore che si troverà sempre ad operare in condizioni di non saturazione.

3) Il modello del sistema, con il valore assegnato a k_a, è descritto dalle matrici

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -324 & -36 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 54 \end{bmatrix}$$
$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\ .$$

Gli autovalori di A, coincidenti, assumono il valore

$$\lambda = -18$$

ed il polinomio caratteristico è dato da

$$p(\lambda) = \left(\lambda + 18\right)^2\ .$$

Si ha, inoltre,

$$\mathrm{agg}\left(\lambda I - A\right) = \begin{bmatrix} \lambda + 36 & 1 \\ -324 & \lambda \end{bmatrix}$$

ed il massimo comun divisore monico dei suoi elementi è eguale ad 1. Ne segue che il polinomio minimo di A coincide con il polinomio caratteristico e che la matrice di transizione può essere espressa nella forma

$$e^{At} = \alpha_0 I + \alpha_1 A$$

ove

$$\begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} e^{\lambda t} \\ t\,e^{\lambda t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\lambda \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{\lambda t} \\ t\,e^{\lambda t} \end{bmatrix}\ .$$

Risulta quindi

$$\alpha_0 = \left(1 - \lambda t\right) e^{\lambda t}$$
$$\alpha_1 = t\,e^{\lambda t}$$

$$e^{At} = \begin{bmatrix} (1+18t)\,e^{-18t} & t\,e^{-18t} \\ -324t\,e^{-18t} & (1-18t)\,e^{-18t} \end{bmatrix} .$$

Per semplificare lo studio della dinamica del servomeccanismo si può considerare una elevazione iniziale diversa da zero ed applicare l'ingresso (nullo) che porta l'antenna ad elevazione zero; si ottiene in tal modo il vantaggio di ridurre lo studio a quello di un moto libero. Considerando come stato iniziale quello di massima elevazione (90 gradi) ed assumendo una velocità di rotazione iniziale nulla si ottiene

$$\theta(t) = x_1(t) = 90\left(1+18t\right)\, e^{-18t} .$$

L'andamento nel tempo è quello riportato in Figura 8.3.

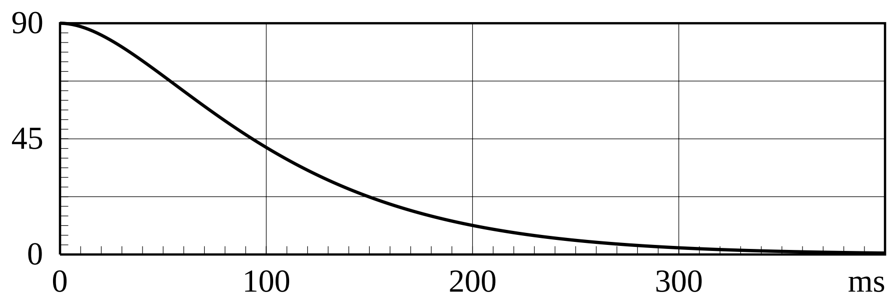


Fig. 8.3

Per $t = 500$ ms risulta $\theta(t) = 0.11$ gradi; il transitorio può quindi considerarsi esaurito dopo circa mezzo secondo.

OSSERVAZIONI

a) Applicando la tensione calcolata al motore nelle condizioni considerate (antenna ferma ed elevazione nulla) si otterrebbe, trascurando l'induttanza del circuito di armatura, un valore elevatissimo per la corrente, pari a $V_{a\,max}/R_a$ = 848 A. In pratica l'induttanza del circuito di armatura e dei circuiti di uscita dell'amplificatore di potenza provvede a limitare il valore effettivo. Qualora tale effetto non risulti sufficiente si introdurrà una limitazione della corrente di uscita dell'amplificatore di potenza realizzata, ad esempio, sottraendo all'ingresso dell'amplificatore una tensione proporzionale alla corrente di uscita.