4

I modelli ingresso/uscita dei sistemi lineari

In questo capitolo verranno descritte le proprietà dei modelli di ingresso/uscita dei sistemi lineari stazionari ed i loro legami con i modelli ingresso/stato/uscita. Verrà pure trattato il problema della realizzazione della risposta impulsiva e di sequenze generiche di ingresso/uscita di un sistema discreto.

4.1 I MODELLI INGRESSO/USCITA DEI SISTEMI LINEARI STAZIONARI DISCRETI E CONTINUI

Si considereranno nel seguito, per semplicità, sistemi con una sola uscita; tale limitazione non è particolarmente restrittiva sul piano pratico perché il modello di qualunque sistema dinamico può essere scomposto in tanti modelli ad uscita singola quante sono le uscite stesse. Non verranno invece introdotti limiti sul numero, p, di ingressi. Facendo riferimento ai sistemi discreti i modelli di ingresso/uscita sono del tipo

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i \, y(t+i) = \sum_{j=1}^{p} \sum_{i=0}^{n} \beta_{ji} \, u_j(t+i) \; ; \tag{4.1.1}$$

si tratta quindi di modelli che mettono in relazione i valori assunti dall'uscita e dagli ingressi in istanti di tempo diversi. Assumendo $\alpha_n = 1$, la (4.1.1) può anche essere scritta nella forma

$$y(t+n) = -\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i \, y(t+i) + \sum_{j=1}^{p} \sum_{i=0}^{n} \beta_{ji} \, u_j(t+i) \, . \tag{4.1.2}$$

Le rappresentazioni (4.1.1) e (4.1.2) possono anche essere scritte in una forma equivalente introducendo l'operatore *anticipo unitario* z cioè un operatore tale che

$$z\, y(t) = y(t+1), \quad z^2\, y(t) = y(t+2)\ , \ \ldots$$

Usando tale notazione la (4.1.1) diventa

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i\, z^i\, y(t) = \sum_{j=1}^{p} \sum_{i=0}^{n} \beta_{ji}\, z^i\, u_j(t) \tag{4.1.3}$$

o anche

$$p(z)\, y(t) = \sum_{j=1}^{p} q_j(z)\, u_j(t) \tag{4.1.4}$$

ove

$$p(z) = z^n + \alpha_{n-1}\, z^{n-1} + \ldots + \alpha_1\, z + \alpha_0 \tag{4.1.5}$$

$$q_j(z) = \beta_{jn}\, z^n + \beta_{j(n-1)}\, z^{n-1} + \ldots + \beta_{j1}\, z + \beta_{j0} \tag{4.1.6}$$

Per i sistemi continui le rappresentazioni ingresso/uscita pongono in relazione valori degli ingressi, dell'uscita e delle loro derivate in ogni istante di tempo; sono cioè modelli del tipo

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i\, \frac{\mathrm{d}^i}{\mathrm{d}t^i}\, y(t) = \sum_{j=1}^{p} \sum_{i=0}^{n} \beta_{ji}\, \frac{\mathrm{d}^i}{\mathrm{d}t^i}\, u(t). \tag{4.1.7}$$

Introducendo l'operatore derivata s, cioè un operatore tale che

$$s\, y(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, y(t)\ , \quad s^2\, y(t) = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\, y(t)\ , \ \ldots$$

il modello (4.1.7) può essere scritto nella forma equivalente

$$p(s)\, y(t) = \sum_{j=1}^{p} q_j(s)\, u_j(t) \tag{4.1.8}$$

ove

$$p(s) = s^n + \alpha_{n-1}\, s^{n-1} + \ldots + \alpha_1\, s + \alpha_0 \tag{4.1.9}$$

$$q_j(s) = \beta_{jn}\, s^n + \beta_{j(n-1)}\, s^{n-1} + \ldots + \beta_{j1}\, s + \beta_{j0} \tag{4.1.10}$$

I modelli visti possono descrivere solo la parte osservabile di un sistema dinamico e possono essere dedotti da un modello nello spazio degli stati nel modo seguente. Facendo riferimento ad un modello discreto, del tipo quindi

$$x(t+1) = A_d\, x(t) + B_d\, u(t) \tag{4.1.11}$$
$$y(t) = C_d\, x(t) + D_d\, u(t) \tag{4.1.12}$$

e sostituendo ripetutamente la (4.1.11) nella (4.1.12) si ottiene

$$\begin{aligned}
y(t) &= C_d\, x(t) + D_d\, u(t) \\
z\, y(t) &= C_d A_d\, x(t) + C_d B_d\, u(t) + D_d\, z\, u(t) \\
z^2\, y(t) &= C_d A_d^2\, x(t) + C_d A_d B_d\, u(t) + C_d B_d\, z\, u(t) + D_d\, z^2\, u(t) \\
&\cdots\cdots \\
z^n\, y(t) &= C_d A_d^n\, x(t) + \sum_{j=1}^{n-1} C_d A_d^j B_d\, z^{n-j-1}\, u(t) + D_d\, z^n\, u(t).
\end{aligned} \tag{4.1.13}$$

Indicando poi con

$$p(\lambda) = \lambda^n + \alpha_{n-1}\, \lambda^{n-1} + \ldots + \alpha_1\, \lambda + \alpha_0$$

il polinomio caratteristico di A_d, si sommino le relazioni (4.1.13) moltiplicate rispettivamente per α_0, α_1, $\ldots$, α_{n-1}, 1 cioè per i coefficienti di $p(\lambda)$. Per il teorema di Cayley–Hamilton risulta

$$C_d \left[\, \alpha_0\, I + \alpha_1\, A_d + \ldots + \alpha_{n-1}\, A_d^{n-1} + A_d^n \,\right] = 0$$

e la somma ottenuta si riduce a

$$p(z)\, y(t) = Q(z)\, u(t) \tag{4.1.14}$$

ove

$$Q(z) = \left[\, q_1(z)\; q_2(z)\; \ldots\; q_p(z) \,\right] \tag{4.1.15}$$

cioè ad una rappresentazione del tipo (3.1). Passaggi del tutto analoghi possono essere ripetuti per il caso continuo.

Va osservato come la sommatoria a secondo membro delle (4.1.1), (4.1.2) e (4.1.3) si estenda da 0 ad n nel caso più generale di sistemi non puramente dinamici mentre si limiti a $n-1$ nel caso di sistemi puramente dinamici. Si è già detto come i modelli di ingresso/uscita considerati descrivano la sola parte osservabile di un sistema dinamico; la parte non raggiungibile di tali modelli può essere eliminata dividendo i polinomi $p(z)$ e $q_j(z)$ ($p(s)$ e $q_j(s)$) per il loro massimo comun divisore.

Esempio 4.1

Si consideri il sistema lineare stazionario e discreto già visto nell'Esempio 3.1 e descritto dalle matrici

$$A_d = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad B_d = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$C_d = [\, 1 \quad 1 \,] \qquad D_d = [\, 2 \,] \ .$$

Si vuole determinare, per tale sistema, una rappresentazione di ingresso/uscita del tipo (4.1.4). Il polinomio caratteristico di A_d è dato da

$$p(\lambda) = \det\big(\lambda I - A_d\big) = \det \begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ -1 & (\lambda + 1) \end{bmatrix} = \lambda^2 + \lambda - 1 \ .$$

Scrivendo l'espressione del valore dell'uscita ai tempi t, $t+1$ e $t+2$ si ottiene

$$\begin{aligned} y(t) &= C_d\, x(t) + D_d\, u(t) \\ z\, y(t) &= C_d A_d\, x(t) + C_d B_d\, u(t) + D_d\, z\, u(t) \\ z^2\, y(t) &= C_d A_d^2\, x(t) + C_d A_d B_d\, u(t) + C_d B_d\, z\, u(t) + D_d\, z^2\, u(t) \end{aligned}$$

Sommando tali relazioni moltiplicate per i coefficienti del polinomio caratteristico (la prima per -1, la seconda per 1 e la terza per 1) si ottiene

$$\begin{aligned} &\big(z^2 + z - 1\big)\, y(t) = \\ &\big[D_d\, z^2 + \big(D_d + C_d B_d\big) z - D_d + C_d B_d + C_d A_d B_d\big] u(t) = \\ &\big(2z^2 + 3z\big)\, u(t) \end{aligned}$$

che costituisce il modello di ingresso/uscita cercato. Si noti che, non essendo il sistema puramente dinamico, i polinomi $p(z)$ e $q(z)$ hanno lo stesso grado.

Esempio 4.2

Si consideri il sistema lineare stazionario continuo già visto nell'Esempio 3.2 e descritto dalle matrici

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$
$$C = [\, -1 \quad -1 \,] \, .$$

Si vuole determinare, per il sistema, una rappresentazione di ingresso/uscita del tipo (4.1.8). Il polinomio caratteristico di A è dato da

$$p(\lambda) = \det\big(\lambda I - A_d\big) = \det \begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ 2 & (\lambda + 2) \end{bmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda + 2 \ .$$

Scrivendo l'espressione dell'uscita, e delle sue derivate prima e seconda si ottiene

$$
\begin{aligned}
y(t) &= C\,x(t) \\
s\,y(t) &= CA\,x(t) + CB\,u(t) \\
s^2\,y(t) &= CA^2\,x(t) + CAB\,u(t) + CB\,s\,u(t)\ .
\end{aligned}
$$

Sommando tali relazioni moltiplicate per i coefficienti del polinomio caratteristico (la prima per 2, la seconda per 2 e la terza per 1) si ottiene

$$
\big(s^2 + 2s + 2\big)\,y(t) = \big(CBs + 2CB + CAB\big)u(t) = 2\,u(t)
$$

che costituisce il modello di ingresso/uscita cercato. Si noti che, essendo in questo caso il sistema puramente dinamico, il polinomio $p(s)$ ha grado superiore a quello di $q(s)$.

4.2 LA FUNZIONE DI TRASFERIMENTO

Si consideri la rappresentazione di ingresso/uscita (4.1.4) (o l'analoga (4.1.8) nel caso continuo); dividendo entrambi i membri per $p(z)$ ($p(s)$) si ottengono le relazioni

$$
y(t) = \sum_{j=1}^{p} \frac{q_j(z)}{p(z)}\,u_j(t) = \sum_{j=1}^{p} G_j(z)\,u_j(t) \tag{4.2.1}
$$

$$
y(t) = \sum_{j=1}^{p} \frac{q_j(s)}{p(s)}\,u_j(t) = \sum_{j=1}^{p} G_j(s)\,u_j(t) \tag{4.2.2}
$$

Le funzioni razionali

$$
G_j(z) = \frac{q_j(z)}{p(z)} \tag{4.2.3}
$$

$$
G_j(s) = \frac{q_j(s)}{p(s)} \tag{4.2.4}
$$

sono definite *funzioni di trasferimento* tra l'ingresso j–esimo e l'uscita del sistema; più in generale le matrici

$$
G(z) = [\ G_1(z)\ \dots\ G_n(z)\ ] \tag{4.2.5}
$$

$$
G(s) = [\ G_1(s)\ \dots\ G_n(s)\ ] \tag{4.2.6}
$$

sono dette funzioni di trasferimento dei sistemi discreti e continui considerati. Tali funzioni di trasferimento descrivono anche, considerando z ed s come variabili complesse, il legame tra le z–trasformate, $Y(z)$ e $U(z)$ dell'uscita e dell'ingresso di un sistema discreto e tra le trasformate di Laplace dell'uscita e dell'ingresso, $Y(s)$ e $U(s)$, nel caso continuo; valgono cioè le relazioni

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = G(z) \tag{4.2.7}$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s)\ . \tag{4.2.8}$$

Le funzioni di trasferimento possono essere ottenute direttamente dalle rappresentazioni nello spazio degli stati. Si faccia infatti riferimento al sistema discreto (4.1.11), (4.1.12); la (4.1.11) può anche essere scritta nella forma

$$\big(z\, I - A_d\big)\, x(t) = B_d\, u(t)$$

dalla quale segue

$$x(t) = \big(z\, I - A_d\big)^{-1} B_d\, u(t)$$

$$y(t) = C_d\, \big(z\, I - A_d\big)^{-1} B_d\, u(t) + D_d\, u(t)\ .$$

Risulta quindi

$$G(z) = C_d\, \big(z\, I - A_d\big)^{-1} B_d + D_d \tag{4.2.9}$$

e, analogamente, nel caso continuo

$$G(s) = C\, \big(s\, I - A\big)^{-1} B + D\ . \tag{4.2.10}$$

È inoltre possibile verificare come la funzione di trasferimento di un sistema discreto sia la z–trasformata della risposta impulsiva di tale sistema,

$$G(z) = \mathcal{Z}\big(C_d\, A_d^{k-1}\, B_d\big) \tag{4.2.11}$$

e, analogamente, nel caso continuo la funzione di trasferimento è la trasformata di Laplace della risposta impulsiva,

$$G(s) = \mathcal{L}\big(C\, e^{At} B\big). \tag{4.2.12}$$

Le (4.2.11) e (4.2.12) fanno riferimento a sistemi puramente dinamici come si è già fatto definendo la risposta impulsiva dei sistemi continui. Sostituendo inoltre la variabile complessa s con $j\omega$ nella $G(s)$ si ottiene la *risposta frequenziale* $G(j\omega)$. Il modulo dell'elemento $g_j(j\omega)$ fornisce il rapporto che si osserva, a regime, tra l'ampiezza di un segnale sinusoidale di pulsazione ω applicato all'ingresso j e l'ampiezza dello stesso segnale in uscita; l'argomento di $g_j(j\omega)$ fornisce invece lo sfasamento tra tali segnali.

Esempio 4.3

Si consideri il sistema lineare stazionario e discreto già visto negli Esempi 3.1 e 4.1. Si vuole ora calcolare la funzione di trasferimento di tale sistema. Utilizzando il modello di ingresso/uscita ottenuto nell'Esempio 4.1 si ottiene

$$G(z) = \frac{p(z)}{q(z)} = \frac{2\,z^2 + 3\,z}{z^2 + z - 1}.$$

Volendo invece ricavare la $G(z)$ direttamente dal modello nello spazio degli stati risulta

$$\begin{aligned} G(z) &= C_d\big(z\,I - A_d\big)^{-1} B_d + D_d \\ &= C_d\,\frac{\operatorname{agg}\big(z\,I - A_d\big)}{\det\big(z\,I - A_d\big)}\,B_d + D_d \\ &= [\,1 \quad 1\,]\,\frac{\begin{bmatrix} z+1 & 1 \\ 1 & z \end{bmatrix}}{z^2 + z - 1}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + [2] = \frac{2\,z^2 + 3\,z}{z^2 + z - 1}. \end{aligned}$$

Per il sistema lineare stazionario continuo già visto negli Esempi 3.2 e 4.2 si ottiene, utilizzando il modello di ingresso/uscita ricavato nell'Esempio 4.2,

$$G(s) = \frac{p(s)}{q(s)} = \frac{2}{s^2 + 2s + 2}.$$

Volendo invece ricavare la $G(s)$ direttamente dal modello nello spazio degli stati risulta

$$\begin{aligned} G(s) &= C\big(s\,I - A\big)^{-1} B = C\,\frac{\operatorname{agg}\big(s\,I - A\big)}{\det\big(s\,I - A\big)}\,B \\ &= [\,-1 \quad -1\,]\,\frac{\begin{bmatrix} s+2 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix}}{s^2 + 2s + 2}\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} = \frac{2}{s^2 + 2s + 2}. \end{aligned}$$

4.3 REALIZZAZIONE DELLA RISPOSTA IMPULSIVA DI UN SISTEMA DISCRETO

Con il termine *realizzazione* si intende in genere la deduzione di un modello nello spazio degli stati per un sistema dinamico a partire da un modello di ingresso/uscita oppure da sequenze di ingresso/uscita rilevate sul sistema; in quest'ultimo caso ci si riferisce normalmente a modelli a tempo discreto. Un classico problema di realizzazione è quello che fa riferimento alla disponibilità dei campioni della risposta impulsiva.

Assegnati i campioni della risposta impulsiva del modello discreto di un sistema puramente dinamico, $W(1)$, $W(2)$, $\ldots$, si vuole determinare una terna A_d, B_d, C_d che descriva un sistema dinamico di ordine minimo con la risposta impulsiva assegnata. Si costruisca, a tale scopo, la matrice di Hankel di campioni della risposta impulsiva data da

$$M = \begin{bmatrix} W(1) & W(2) & W(3) & \ldots \\ W(2) & W(3) & W(4) & \ldots \\ W(3) & W(4) & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{bmatrix} \tag{4.3.1}$$

e si calcoli il rango delle sottomatrici

$$M_2 = \begin{bmatrix} W(1) & W(2) \\ W(2) & W(3) \end{bmatrix} \quad M_3 = \begin{bmatrix} W(1) & W(2) & W(3) \\ W(2) & W(3) & W(4) \\ W(3) & W(4) & W(5) \end{bmatrix} \quad \ldots ; \tag{4.3.2}$$

si otterrà, in generale, la sequenza crescente $2, 3, \ldots, n, n, \ldots$ che si stabilizza all'ordine minimo, n, dei sistemi in grado di generare la sequenza assegnata. Si consideri ora la matrice

$$M_{n+1} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \ldots \\ r_{n+1} \end{bmatrix} \tag{4.3.3}$$

e si esprima la sua ultima riga come combinazione lineare delle precedenti attraverso la relazione

$$r_{n+1} = \alpha_0 r_1 + \alpha_1 r_2 + \ldots + \alpha_{n-1} r_n \, . \tag{4.3.4}$$

Realizzazioni di ordine minimo della risposta impulsiva considerata sono descritte dalle terne

$$A'_d = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 1 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots \\ \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots \end{bmatrix} \qquad B'_d = \begin{bmatrix} W(1) \\ W(2) \\ \vdots \\ W(n) \end{bmatrix}$$

$$C'_d = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots \end{bmatrix}. \tag{4.3.5}$$

$$A''_d = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & \alpha_0 \\ 1 & 0 & \ldots & \alpha_1 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \alpha_{n-1} \end{bmatrix} \qquad B''_d = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C''_d = \begin{bmatrix} W(1) & W(2) & \ldots & W(n) \end{bmatrix}. \tag{4.3.6}$$

Si osservi che il polinomio caratteristico di A'_d e di A''_d è

$$p(\lambda) = \lambda^n - \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} - \ldots - \alpha_1\lambda - \alpha_0. \tag{4.3.7}$$

Essendo infatti, per un sistema discreto, $W(k) = C_d\, A_d^{k-1}\, B_d$, la matrice (4.3.1) è data da

$$M = \begin{bmatrix} C_d B_d & C_d A_d B_d & C_d A_d^2 B_d & \ldots \\ C_d A_d B_d & C_d A_d^2 B_d & C_d A_d^3 B_d & \ldots \\ C_d A_d^2 B_d & C_d A_d^3 B_d & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{bmatrix}; \tag{4.3.8}$$

l'ordine del modello viene determinato come il più piccolo intero compatibile con la relazione

$$A_d^n = \alpha_0 I + \alpha_1 A_d + \ldots + \alpha_{n-1} A_d^{n-1}. \tag{4.3.9}$$

È poi immediato verificare come sia per la terna A'_d, B'_d, C'_d che per la terna A''_d, B''_d, C''_d risulti, per costruzione,

$$C'_d\, A'_{d(k-1)}\, B'_d = C''_d\, A''_{d(k-1)}\, B''_d = W(k) \text{ per } k = 1, 2, \ldots, n\ ; \tag{4.3.10}$$

la validità della stessa relazione per $k > n$ è infine assicurata dalla (4.3.9).

Esempio 4.4

I primi 10 campioni della risposta impulsiva di un sistema lineare e stazionario, puramente dinamico, discreto, con un solo ingresso ed una sola uscita, sono dati da

$$\begin{array}{ll} W(1) = 0 & W(6) = 1.2496 \\ W(2) = 1 & W(7) = 1.07744 \\ W(3) = 1.4 & W(8) = 0.908608 \\ W(4) = 1.48 & W(9) = 0.75488 \\ W(5) = 1.4 & W(10) = 0.62070 \end{array}$$

Sulla base di tali misure si vuole determinare una realizzazione di tale risposta. Come primo passo della procedura di realizzazione è opportuno determinare l'ordine minimo di un modello in grado di generare come risposta impulsiva la sequenza assegnata che coincide con il rango della matrice di campioni della risposta impulsiva (4.3.1). Considerando il rango delle sottomatrici di dimensioni crescenti

$$M_2 = \begin{bmatrix} C_d B_d & C_d A_d B_d \\ C_d A_d B_d & C_d A_d^2 B_d \end{bmatrix}$$

$$M_3 = \begin{bmatrix} C_d B_d & C_d A_d B_d & C_d A_d^2 B_d \\ C_d A_d B_d & C_d A_d^2 B_d & C_d A_d^3 B_d \\ C_d A_d^2 B_d & C_d A_d^3 B_d & C_d A_d^4 B_d \end{bmatrix} \quad \ldots$$

si otterrà, in generale, una sequenza crescente di numeri interi che si stabilizzerà all'ordine del sistema. Nel caso in esame si ottiene

$$\text{rango}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1.4 \end{bmatrix} = 2 \qquad \text{rango}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1.4 \\ 1 & 1.4 & 1.48 \\ 1.4 & 1.48 & 1.4 \end{bmatrix} = 2 \qquad \ldots$$

Essendo M_3 di rango 2 come M_2 anche tutte le matrici successive saranno di rango 2; ne segue che l'ordine cercato è $n = 2$.

Per la determinazione dei parametri del modello si conside-rerà la prima sottomatrice contenente un vettore linearmente dipendente dai precedenti e si determineranno i coefficienti di lineare dipendenza di tale vettore dai rimanenti. Indicando con r_i le righe di M_3

$$M_3 = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix}$$

risulta

$$r_3 = \alpha_0 r_1 + \alpha_1 r_2$$

con

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= -0.48 \\ \alpha_1 &= 1.4 \,. \end{aligned}$$

Modelli in forma minima nello spazio degli stati che generano la risposta impulsiva assegnata sono descritti dalle terne di matrici (A'_d, B'_d, C'_d) e (A''_d, B''_d, C''_d)

$$A'_d = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \alpha_0 & \alpha_1 \end{bmatrix} \qquad B'_d = \begin{bmatrix} W(1) \\ W(2) \end{bmatrix}$$

$$C'_d = [\ 1 \quad 0\ ]$$

$$A''_d = \begin{bmatrix} 0 & \alpha_0 \\ 1 & \alpha_1 \end{bmatrix} \qquad B''_d = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C''_d = [\ W(1) \quad W(2)\ ] \,.$$

4.4 REALIZZAZIONE DI SEQUENZE DI INGRESSO/USCITA

Tale problema prevede come dati disponibili le sequenze di ingresso e di uscita rilevate su di un sistema, in genere discreto; si vuole ottenere un modello nello spazio degli stati o di ingresso/uscita compatibile con tali sequenze. La soluzione di tale problema verrà considerata, per semplicità, per i sistemi puramente dinamici con un solo ingresso ed una sola uscita. Assegnate generiche sequenze di ingresso e di uscita di un sistema dinamico lineare stazionario e discreto, $u(k), y(k), k = 0, 1, 2, \ldots$ si vuole determinare un modello nello spazio degli stati di ordine minimo compatibile con tali sequenze e lo stato iniziale di tale modello corrispondente alle sequenze considerate.

Come primo passo nella realizzazione di un modello per le sequenze assegnate si determinerà l'ordine minimo di un modello di ingresso/uscita compatibile con tali sequenze. Si definisca, a tal fine, la matrice quadrata di campioni di ingresso ed uscita M_i, di dimensione $(2i + 1)$, con la seguente struttura

$$M_i = \left[\, M_i^u | M_i^y \,\right] \tag{4.4.1a}$$

ove

$$M_i^u = \begin{bmatrix} u(0) & u(1) & \ldots & u(i-1) \\ u(1) & u(2) & \ldots & u(i) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u(2i) & u(2i+1) & \ldots & u(3i-1) \end{bmatrix} \tag{4.4.1b}$$

$$M_i^y = \begin{bmatrix} y(0) & y(1) & \ldots & y(i) \\ y(1) & y(2) & \ldots & y(i+1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y(2i) & y(2i+1) & \ldots & y(3i) \end{bmatrix} \tag{4.4.1c}$$

e si consideri la sequenza di matrici

$$M_1 \quad M_2 \quad M_3 \quad \ldots \tag{4.4.2}$$

La prima matrice singolare della sequenza, M_h, definisce l'ordine minimo per un modello di ingresso/uscita compa-tibile con le sequenze considerate, $n = h$. La singolarità di M_h consente, infatti, se la sequenza di ingresso applicata è opportuna, di scrivere la relazione

$$y(h) = \sum_{i=0}^{h-1} \alpha_i \, y(i) + \sum_{i=0}^{h-1} \beta_i \, u(i) \tag{4.4.3}$$

che è del tipo

$$p(z)\, y(t) = q(z)\, u(t) \tag{4.4.4}$$

con

$$p(z) = z^h - \alpha_{h-1} z^{h-1} - \ldots - \alpha_1 z - \alpha_0 \tag{4.4.5}$$

$$q(z) = \beta_{h-1} z^{h-1} + \ldots + \beta_1 z + \beta_0 \,. \tag{4.4.6}$$

Una realizzazione completamente osservabile per la rappresentazione di ingresso/uscita trovata è fornita dalla terna di matrici (A_d, B_d, C_d) date da

$$A_d = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{n-1} \end{bmatrix} \quad B_d = S^{-1}\,\overline{B}_d = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$C_d = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \tag{4.4.7}$$

ove

$$S = \begin{bmatrix} -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots & -\alpha_{n-1} & 1 \\ -\alpha_2 & -\alpha_3 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -\alpha_{n-1} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \overline{B}_d = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{n-2} \\ \beta_{n-1} \end{bmatrix} \tag{4.4.8}$$

Per determinare lo stato iniziale del modello nello spazio degli stati descritto dalla terna (A_d, B_d, C_d) si osservi che, a causa della struttura particolare di A_d e C_d risulta

$$\begin{aligned} x_1(k) &= y(k) \\ x_2(k) &= y(k+1) - b_0\,u(k) \\ x_3(k) &= y(k+2) - b_1\,u(k) - b_0\,u(k+1) \\ &\vdots \\ x_n(k) &= y(k+n-1) - b_{n-2}\,u(k) - \dots - b_0\,u(k+n-2) \end{aligned} \tag{4.4.9}$$

Utilizzando l'operatore differenza z si può quindi scrivere l'insieme di relazioni precedenti nella forma più compatta

$$x(k) = V(z)\,y(k) - S\,V(z)\,u(k) \tag{4.4.10}$$

ove

$$V(z) = \begin{bmatrix} 1 \\ z \\ z^2 \\ \vdots \\ z^{n-1} \end{bmatrix} \qquad S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ b_0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ b_1 & b_0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ b_{n-2} & b_{n-3} & \dots & b_0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{4.4.11}$$

Si osservi che la possibilità di ottenere una realizzazione di sequenze di ingresso/uscita di un sistema dinamico è legata alla funzione di ingresso applicata al sistema. La condizione algebrica che deve essere soddisfatta per l'idoneità dell'ingresso è l'indipendenza delle colonne nella sottomatrice di Hankel formata da campioni dell'ingresso nelle matrici M_i per $i \leq n$.

Esempio 4.5

L'ingresso e l'uscita di un sistema lineare e stazionario, puramente dinamico e a tempo discreto, $\mathcal{S}$, assumono, per $t = 0, \dots, 9$, i seguenti valori

$$
\begin{aligned}
u(0) &= 1 \qquad & y(0) &= 3 \\
u(1) &= 0 & y(1) &= 3.8 \\
u(2) &= -1 & y(2) &= 2.56 \\
u(3) &= 1 & y(3) &= -0.208 \\
u(4) &= 1 & y(4) &= 1.8928 \\
u(5) &= -1 & y(5) &= 3.35488 \\
u(6) &= -1 & y(6) &= 0.390336 \\
u(7) &= 1 & y(7) &= -1.6630528 \\
u(8) &= 0 & y(8) &= 0.88469248 \\
u(9) &= 1 & y(9) &= 0.636965888
\end{aligned}
$$

Si vuole determinare un modello di ingresso/uscita ed uno nello spazio degli stati per tale sistema. Come primo passo nella realizzazione di un modello per le sequenze assegnate si determinerà l'ordine minimo di un modello di ingresso/ uscita compatibile con tali sequenze. Si considera, a tal fine, la sequenza di matrici (4.4.2); la prima matrice singolare della sequenza, M_h, definisce l'ordine minimo per un modello di ingresso/uscita compatibile con le sequenze considerate, $n = h$. La singolarità di M_h consente, infatti, se la sequenza di ingresso applicata è opportuna, di scrivere la relazione

$$y(h) = \sum_{i=0}^{h-1} \alpha_i \, y(i) + \sum_{i=0}^{h-1} \beta_i \, u(i)$$

che è del tipo

$$p(z)\, y(t) = q(z)\, u(t)$$

con

$$p(z) = z^h - \alpha_{h-1} z^{h-1} - \dots - \alpha_1 z - \alpha_0$$

$$q(z) = \beta_{h-1} z^{h-1} + \dots + \beta_1 z + \beta_0.$$

Utilizzando i valori precedenti, la prima matrice singolare della sequenza risulta essere M_3. I coefficienti di dipendenza che legano l'ultima colonna di M_3 alle precedenti sono i coefficienti α_i e β_i del modello, dati da

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= 0.192 & \qquad \beta_0 &= 0.56 \\ \alpha_1 &= -1.04 & \beta_1 &= -2.2 \\ \alpha_2 &= 1.8 & \beta_2 &= 2\,. \end{aligned}$$

Il modello cercato è quindi descritto dai polinomi

$$p(z) = z^3 - 1.8\,z^2 + 1.04\,z - 0.192$$

$$q(z) = 2\,z^2 - 2.2\,z + 0.56\,.$$

Per ottenere una realizzazione per la rappresentazione di ingresso/uscita calcolata si useranno le relazioni (4.4.7) e (4.4.8) che, per il sistema in esame, portano a

$$A_d = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0.192 & -1.04 & 1.8 \end{bmatrix} \qquad B_d = S^{-1}\,\overline{B}_d = \begin{bmatrix} 2 \\ 1.4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C_d = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix} 1.04 & -1.8 & 1 \\ -1.8 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \overline{B}_d = \begin{bmatrix} 0.56 \\ -2.2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Si noti come la matrice S risulti strutturalmente non singolare; indipendentemente dai valori dei parametri il valore assoluto del suo determinante è infatti sempre eguale ad 1. Per determinare lo stato iniziale del modello nello spazio degli stati si utilizzeranno le relazioni (4.4.9); risulta

$$\begin{aligned} x_1(0) &= y(0) = 3 \\ x_2(0) &= y(1) - b_0\,u(0) = 3.8 - 2 \cdot 1 = 1.8 \\ x_3(0) &= y(2) - b_1\,u(0) - b_0\,u(1) = 2.56 - 1.4 \cdot 1 - 2 \cdot 0 = 1.16 \end{aligned}$$

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

G. Marro, *Teoria dei Sistemi e del Controllo*, Zanichelli Editore, Bologna, 1989.

R. Guidorzi, *Teoria dei Sistemi: Esercizi e Applicazioni*, Zanichelli Editore, Bologna, 1991.