Relazioni tra modelli nello spazio degli stati e ingresso–uscita

Modello di ordine n con r ingressi ed m uscite

$$\dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,u(t) \quad x(0) = x_0 \tag{1}$$

$$y(t) = C\,x(t) + D\,u(t) \tag{2}$$

Se $x_0 = 0$, trasformando l'equazione di uscita

$$Y(s) = C\,X(s) + D\,U(s) = C\,(s\,I - A)^{-1}\,B\,U(s) + D\,U(s) = G(s)\,U(s).$$

La funzione di trasferimento è dunque

$$\boxed{G(s) = C\,(s\,I - A)^{-1}\,B + D}$$

$G(s)$ è una matrice $m \times r$ del tipo

$$G(s) = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) & \cdots & G_{1r}(s) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ G_{m1}(s) & G_{m2}(s) & \cdots & G_{mr}(s) \end{bmatrix}$$

dove

$$G_{ij}(s) = \frac{Y_i(s)}{U_j(s)},$$

che è la funzione di trasferimento tra il j–esimo ingresso e la i–esima uscita.

Inoltre

$$\mathcal{L}^{-1}[G(s)] = G(t) = C\,e^{At}\,B + D\,\delta(t), \qquad \mathcal{L}^{-1}[G_{ij}(s)] = g_{ij}(t).$$

Se $D = 0$ tutti gli elementi di $G(s)$ sono funzioni razionali fratte strettamente proprie.

Per un sistema SISO $G(s)$ è ovviamente una funzione razionale fratta che, a sua volta, può essere trasformata in una equazione differenziale ingresso–uscita.

Il passaggio $(A, B, C, D) \;\rightarrow\; G(s)$ è univoco $\Rightarrow$ la funzione di trasferimento è unica.

Esempio.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad D = 1$$

$$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+2} & 0 \\ \frac{2}{(s+2)(s+4)} & \frac{1}{s+4} \end{bmatrix}$$

$$G(s) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{s+2} & 0 \\ \frac{2}{(s+2)(s+4)} & \frac{1}{s+4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{s^2 + 10s + 22}{s^2 + 6s + 8}$$

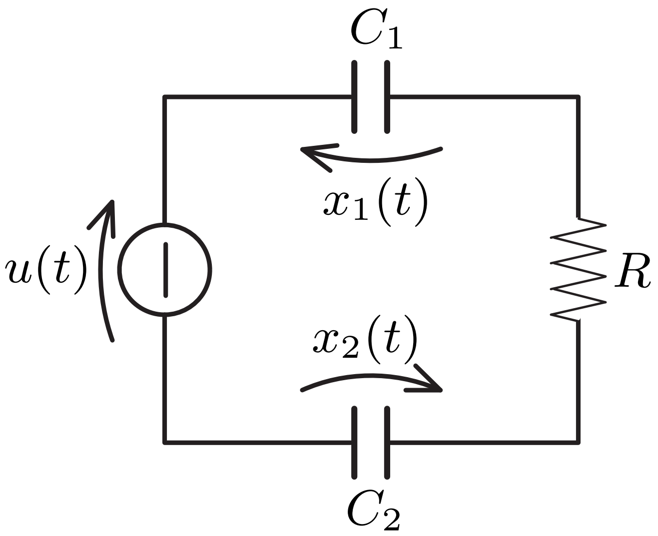
$\diamond$

Nell'esempio sopra (A, B, C, D) e $G(s)$ contengono le stesse informazioni.

(A, B, C, D) e $G(s)$ hanno sempre lo stesso contenuto informativo?

- Nel passaggio $(A, B, C, D) \;\rightarrow\; G(s)$ possono avvenire cancellazioni poli/zeri.
- Se non vi sono cancellazioni il denominatore di $G(s)$ ha grado n, pari al numero di variabili di stato (ordine del sistema) $\Rightarrow$ i poli di $G(s)$ coincidono con gli autovalori di $A \Rightarrow (A, B, C, D)$ e $G(s)$ hanno lo stesso contenuto informativo.
- Se vi sono cancellazioni il denominatore di $G(s)$ ha grado inferiore ad $n \Rightarrow$ i poli di $G(s)$ sono un sottoinsieme degli autovalori di $A \Rightarrow (A, B, C, D)$ e $G(s)$ non hanno lo stesso contenuto informativo.
- Nel caso di cancellazioni, alcune informazioni che riguardano il comportamento interno del sistema e che non hanno effetto sulla relazione ingresso–uscita vanno perse nella $G(s)$. Infatti, la funzione di trasferimento “cattura” solo le dinamiche che influenzano il legame ingresso–uscita.
- La funzione di trasferimento è una rappresentazione esterna del sistema. In essa non vi è traccia delle variabili di stato.
- Le parti “nascoste” del sistema, non presenti in $G(s)$, non possono essere influenzate attraverso l’ingresso e/o non possono essere osservate attraverso l’uscita.

Esempio 1: rete RC



$$\dot{x}_1(t) = \frac{u(t) - x_1(t) - x_2(t)}{R\,C_1}$$

$$\dot{x}_2(t) = \frac{u(t) - x_1(t) - x_2(t)}{R\,C_2}$$

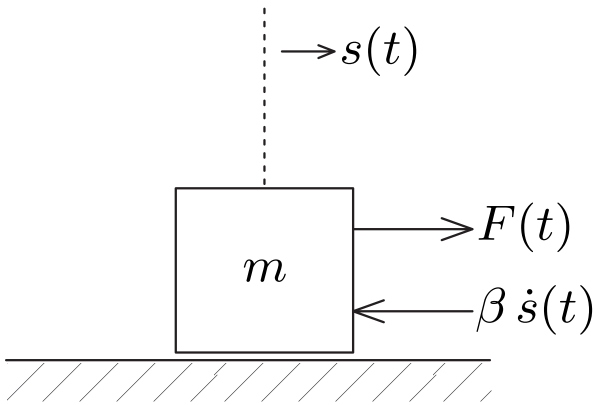
$$y(t) = x_1(t)$$

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R\,C_1} & -\frac{1}{R\,C_1} \\ -\frac{1}{R\,C_2} & -\frac{1}{R\,C_2} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{R\,C_1} \\ \frac{1}{R\,C_2} \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$G(s) = \frac{s/(R\,C_1)}{s\left(s + 1/(R\,C_1) + 1/(R\,C_2)\right)} = \frac{1/R\,C_1}{s + 1/(R\,C_1) + 1/(R\,C_2)}$$

Dal punto di vista del legame ingresso–uscita il sistema è di ordine 1. Per $y(t) = x_2(t)$ e $y(t) = x_1(t) + x_2(t)$ si ottengono risultati simili.

Esempio 2: massa con attrito viscoso



$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = -\frac{\beta}{m} x_2(t) + \frac{u(t)}{m}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\dfrac{\beta}{m} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{m} \end{bmatrix}$$

$$y(t) = x_1(t) \quad \Rightarrow \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad G(s) = \frac{1/m}{s\,(s+\beta/m)}$$

$$y(t) = x_2(t) \quad \Rightarrow \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad G(s) = \frac{1/m}{s+\beta/m}$$

Sistemi equivalenti

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A\,x(t) + B\,u(t), \qquad x(0) = x_0 \\ y(t) &= C\,x(t) + D\,u(t).\end{aligned}$$

Sia T una matrice $n \times n$ non singolare. Si consideri un nuovo stato $z(t)$ definito da

$$x(t) = T\,z(t), \qquad z(t) = T^{-1}x(t).$$

Sostituendo nelle equazioni di stato ed uscita si ottiene:

$$\begin{aligned}\dot{z}(t) &= A'\,z(t) + B'\,u(t), \qquad z(0) = T^{-1}x_0 \\ y(t) &= C'\,z(t) + D'\,u(t),\end{aligned}$$

con

$$A' = T^{-1}A\,T \qquad B' = T^{-1}B \qquad C' = C\,T \qquad D' = D.$$

Le matrici A ed A' si dicono *simili*. Matrici simili hanno:

- gli stessi autovalori;
- lo stesso polinomio caratteristico;
- esponenziali di matrice simili $\Rightarrow$ stessi modi.

Equivalenza di sistemi: dato uno stato iniziale x_0 per il sistema (A, B, C, D) è sempre possibile determinare uno stato iniziale $z_0 = T^{-1}x_0$ per il sistema (A', B', C', D') in modo tale che la risposta $y(t)$ dei due sistemi sia la medesima se ad essi viene applicato lo stesso ingresso.

- La scelta delle variabili di stato per un sistema dinamico non è univocamente definita
- Le variabili di stato possono anche non avere significato fisico.

$$\Downarrow$$

Il passaggio $G(s) \;\rightarrow\; (A, B, C, D)$ non è univoco.

Realizzazione di funzioni di trasferimento

Problema della realizzazione: data una funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{b_m\, s^m + b_{m-1}\, s^{m-1} + \cdots + b_1\, s + b_0}{s^n + a_{n-1}\, s^{n-1} + \cdots + a_1\, s + a_0} \qquad m \leq n,$$

trovare un modello nello spazio degli stati (A, B, C, D) di ordine n tale che

$$G(s) = C\,(s\,I - A)^{-1}\,B + D.$$

Il problema della realizzazione ammette ovviamente infinite soluzioni. Tra queste risultano di particolare interesse quelle in cui le matrici (A, B, C, D) presentano una struttura particolare. Nella teoria dei sistemi e del controllo sono spesso utilizzate le *forme canoniche*, caratterizzate dallo stesso numero di parametri del modello ingresso–uscita.

Forma canonica di raggiungibilità:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & \cdots & b_m & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Se $m = n$:

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = b_n + \frac{N'(s)}{D(s)} = b_n + \frac{b'_{n-1}\, s^{n-1} + \cdots + b'_1\, s + b'_0}{s^n + a_{n-1}\, s^{n-1} + \cdots + a_1\, s + a_0}$$

In tal caso:

$$C = \begin{bmatrix} b'_0 & b'_1 & \cdots & b'_{n-1} \end{bmatrix} \qquad D = b_n.$$

Forma canonica di osservabilità:

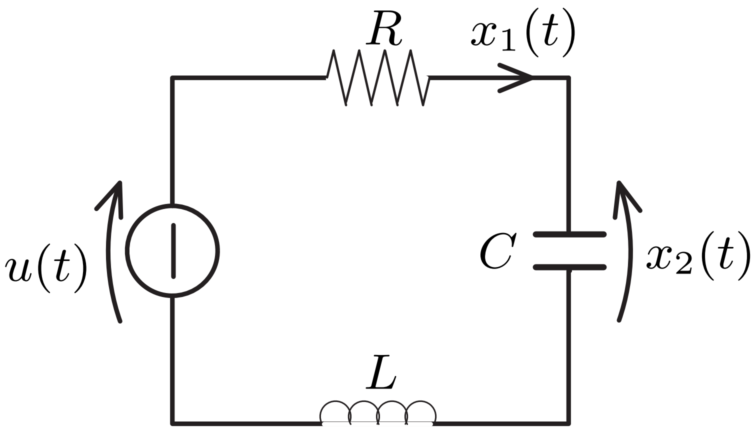
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_m \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Se $m = n$:

$$B = \begin{bmatrix} b'_0 \\ b'_1 \\ \vdots \\ b'_{n-1} \end{bmatrix} \qquad D = b_n.$$

Esempio: rete RLC



$$\dot{x}_1(t) = -\frac{R}{L}x_1(t) - \frac{x_2(t)}{L} + \frac{u(t)}{L}$$

$$\dot{x}_2(t) = \frac{x_1(t)}{C}$$

$$y(t) = x_2(t)$$

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$G(s) = \frac{\frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{R}{L}\,s + \frac{1}{LC}}$$

Partendo da $G(s)$ ricaviamo ora le forme canoniche di raggiungibilità ed osservabilità:

$$A_r = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \qquad B_r = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad C_r = \begin{bmatrix} \frac{1}{LC} & 0 \end{bmatrix}$$

Tale modello corrisponde alla scelta

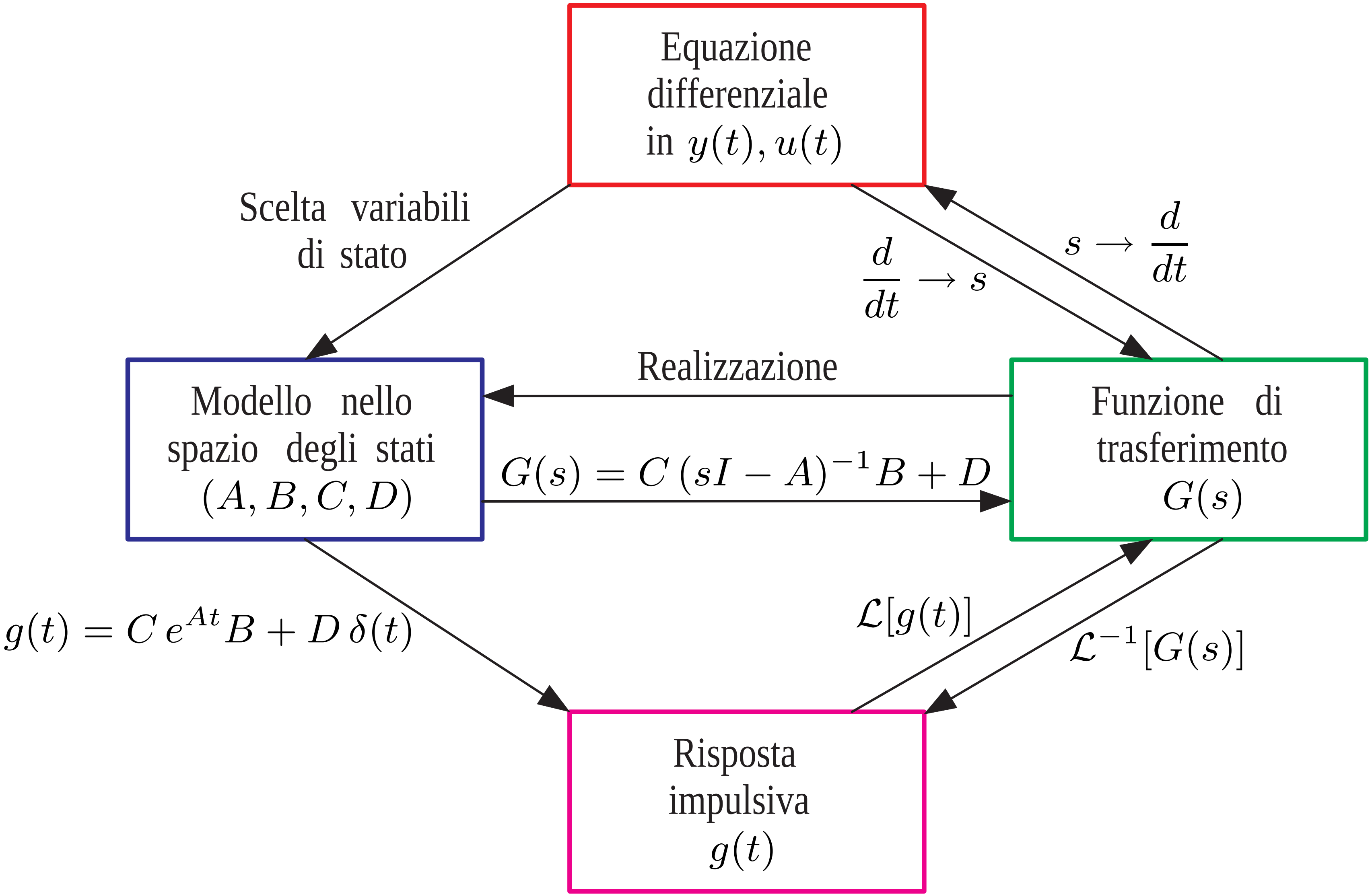
$$z_1(t) = LC\, x_2(t) \qquad z_2(t) = L\, x_1(t).$$

$$A_o = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{LC} \\ 1 & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \qquad B_o = \begin{bmatrix} \frac{1}{LC} \\ 0 \end{bmatrix} \qquad Co = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tale modello corrisponde alla scelta

$$z_1(t) = \frac{x_1(t)}{C} + \frac{R}{L}\, x_2(t) \qquad z_2(t) = x_2(t).$$

Rappresentazioni dei sistemi lineari SISO



Esempio.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$G(s) = \frac{s+7}{(s+1)\,(s+3)}$$

$$\ddot{y}(t) + 4\,\dot{y}(t) + 3\,y(t) = \dot{u}(t) + 7\,u(t)$$

$$g(t) = 3\,e^{-t} - 2\,e^{-3t}$$

L’unica rappresentazione che non si può ricavare in maniera univoca è quella nello spazio degli stati.