Analisi di sistemi lineari e stazionari: la trasformata di Laplace

I modelli lineari e stazionari presentano proprietà estremamente interessanti e si dispone di strumenti molto potenti per la loro analisi $\Longrightarrow$ si ricorre il più possibile al loro utilizzo nella soluzione di problemi utilizzando, eventualmente, la linearizzazione.

Equazione differenziale

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0\, y = $$
$$= b_m \frac{d^m u}{dt^m} + \cdots + b_1 \frac{du}{dt} + b_0\, u$$

Problema: determinare $y(t)$ conoscendo

- i coefficienti $a_o, \ldots, a_n, b_o, \ldots, b_m$
- l'ingresso $u(\cdot)$ nell'intervallo $[t_0, t]$
- le condizioni iniziali

$$y(t_0),\ \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=t_0},\ \ldots,\ \left.\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}\right|_{t=t_0}$$

Modello nello spazio degli stati

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A\,x(t) + B\,u(t) \\ y(t) &= C\,x(t) + D\,u(t) \end{aligned}$$

Problema: determinare $x(t), y(t)$ conoscendo

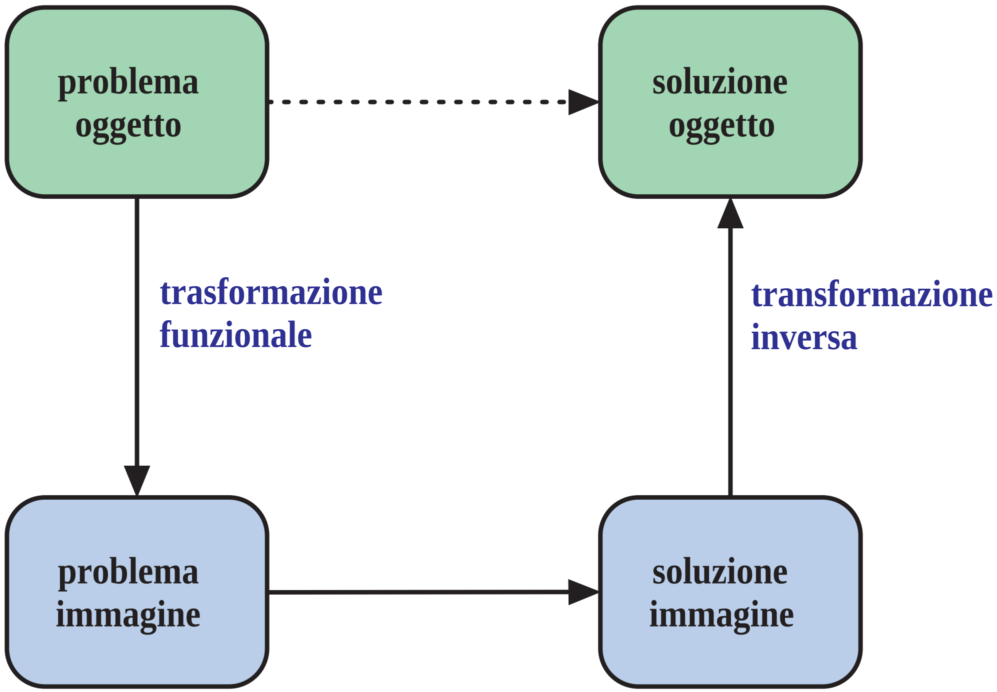
- le matrici A, B, C, D
- l'ingresso $u(\cdot)$ nell'intervallo $[t_0, t]$
- le condizioni iniziali

$$x(t_0) = \begin{bmatrix} x_1(t_0) & x_2(t_0) & \cdots & x_n(t_0) \end{bmatrix}^T$$

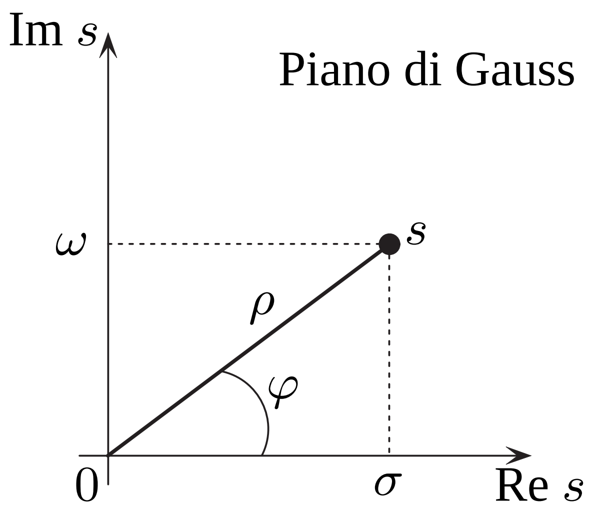
Osservazioni:

- si può sempre assumere $a_n = 1$. Infatti, se $a_n \neq 1$, si possono dividere tutti i coefficienti dell'equazione per a_n.
- essendo i modelli stazionari, si può sempre assumere $t_0 = 0$ (traslazione dell'origine dell'asse dei tempi).

Trasformazioni funzionali: associano una *funzione oggetto* ad una *funzione immagine* di diversa natura mediante la quale diventa più agevole risolvere un determinato problema.



Richiami sui numeri complessi



$$s = \sigma + j\,\omega \qquad \text{forma cartesiana}$$

$$s = \rho\, e^{j\varphi} \qquad \text{forma polare}$$

$\sigma =$ parte reale, $\omega =$ parte immaginaria

$\rho =$ modulo, $\varphi =$ argomento

$$e^{j\varphi} = \cos\varphi + j\,\mathrm{sen}\,\varphi$$

Da forma polare a forma cartesiana:

$$\sigma = \rho\cos\varphi \qquad \omega = \rho\,\mathrm{sen}\,\varphi$$

Da forma cartesiana a forma polare:

$$\rho = \sqrt{\sigma^2 + \omega^2} \qquad \varphi = \arctan\frac{\omega}{\sigma} = \mathrm{arcsen}\,\frac{\omega}{\sqrt{\sigma^2+\omega^2}}$$

Per avere biunivocità tra le due rappresentazioni occorre che

$$-\pi \le \varphi \le \pi \qquad \text{oppure} \qquad 0 \le \varphi \le 2\,\pi$$

Il *complesso coniugato* di $s = \sigma + j\,\omega = \rho\, e^{j\varphi}$ è

$$\bar{s} = \sigma - j\,\omega = \rho\, e^{-j\varphi}$$

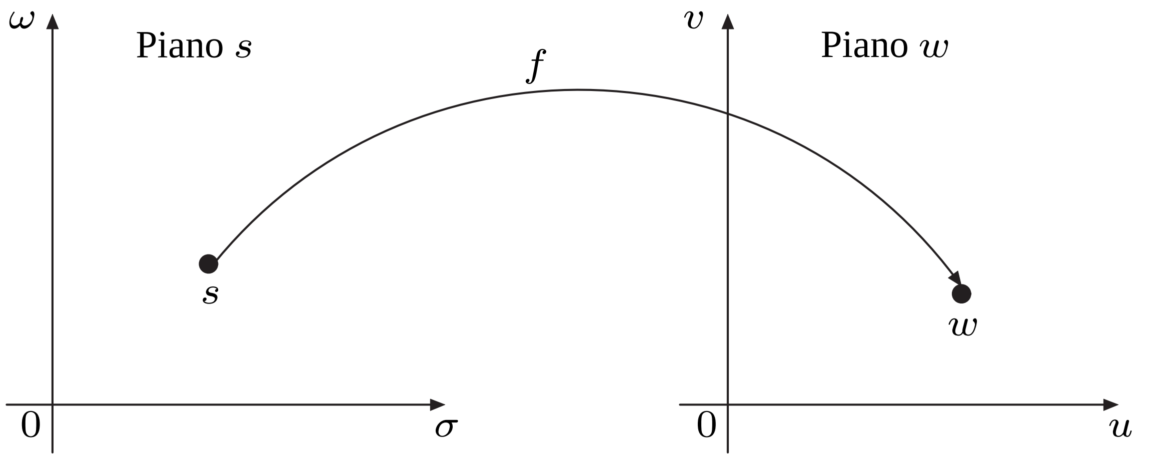
Formule di Eulero:

$$\sin\varphi = \frac{e^{j\varphi} - e^{-j\varphi}}{2\,j} \qquad \cos\varphi = \frac{e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}}{2}$$

Una *funzione di variabile complessa*

$$w = f(s) = u(\sigma,\omega) + j\,v(\sigma,\omega)$$

si definisce specificando le due funzione di due variabili reali $u(\sigma,\omega)$ e $v(\sigma,\omega)$, che ne rappresentano le parti reale ed immaginaria.



Funzione polinomiale: è definita dal polinomio di grado n

$$f(s) = s^n + a_{n-1}\, s^{n-1} + \cdots + a_1\, s + a_0.$$

Gli *zeri della funzione* sono le radici dell'equazione $f(s) = 0$:

$$s^n + a_{n-1}\, s^{n-1} + \cdots + a_1\, s + a_0 = 0.$$

Teorema fondamentale dell'algebra: una funzione polinomiale di grado n ammette esattamente n zeri in campo complesso, alcuni dei quali possono essere coincidenti cioè possono avere molteplicità maggiore di 1. Se i coefficienti $a_0, \ldots, a_{n-1}$ sono reali, le radici dell'equazione sono reali o complesse. Se fra tali radici ve ne è una complessa allora vi è pure la sua coniugata.

Se $s_1, s_2, \ldots, s_n$ sono gli zeri di $f(s)$ è dunque possibile la fattorizzazione

$$f(s) = (s - s_1)\,(s - s_2)\,\cdots\,(s - s_n).$$

Se si hanno $\mu < n$ zeri distinti si ha

$$f(s) = (s - s_1)^{n_1}(s - s_2)^{n_2}\cdots(s - s_\mu)^{n_\mu}.$$

Trasformata di Laplace: associa ad una funzione del tempo $f(t)$ a valori reali una funzione di variabile complessa $F(s)$ a valori complessi

$$\boxed{F(s) = \mathcal{L}\big[f(t)\big] = \int_0^\infty f(t)\, e^{-s\,t} dt, \qquad s = \sigma + j\,\omega.}$$

Condizioni di esistenza:

- $f(t) = 0 \quad \forall t < 0$ (serve solo per l'antitrasformazione)
- $f(t)$ continua a tratti per $t \geq 0$
- $f(t)$ è di *ordine esponenziale*: $\exists\ M > 0,\ \alpha > 0$ tali che $|f(t)| \leq M\, e^{\alpha t},\ \ t \geq 0$

$F(s)$ è definita nel dominio $\sigma > \sigma_0$; σ_0 è detta ascissa di convergenza.

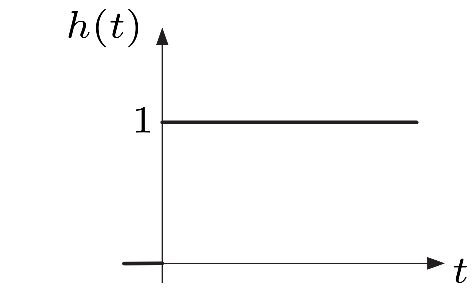
Formula di antitrasformazione:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\big[F(s)\big] = \frac{1}{2\,\pi\,j} \int_{\sigma - j\,\infty}^{\sigma + j\,\infty} F(s)\, e^{s\,t} ds, \qquad \sigma > \sigma_0.$$

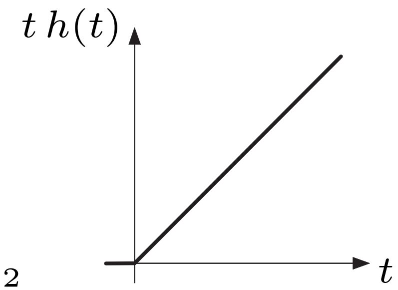
Tale formula è poco utilizzata in pratica.

<u>Tra $f(t)$ ed $F(s)$ esiste una relazione biunivoca.</u>

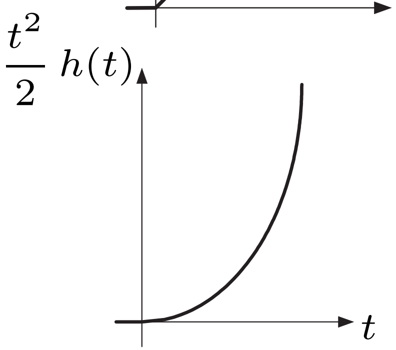
Trasformate di Laplace di alcuni segnali elementari



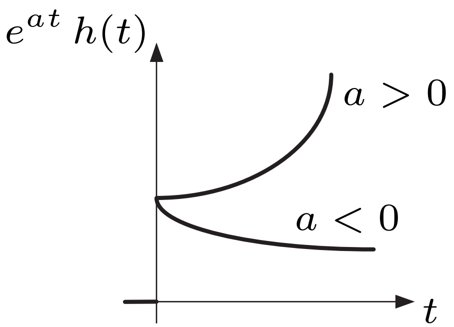
Gradino unitario: $h(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$ $\qquad \mathcal{L}[h(t)] = \dfrac{1}{s}$



Rampa unitaria: $t\,h(t)$ $\qquad \mathcal{L}[t\,h(t)] = \dfrac{1}{s^2}$



Parabola unitaria: $\dfrac{t^2}{2}\,h(t)$ $\qquad \mathcal{L}[\dfrac{t^2}{2}\,h(t)] = \dfrac{1}{s^3}$



Esponenziale: $e^{at}\,h(t)$ $\qquad \mathcal{L}[e^{at}\,h(t)] = \dfrac{1}{s-a}$

Molte trasformate di uso corrente si possono dedurre dalla relazione fondamentale

$$\boxed{\mathcal{L}[t^n\, e^{at}] = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}}$$

Linearità della trasformata di Laplace

Siano $f_1(t)$, $f_2(t)$ due funzioni aventi trasformate $F_1(s)$, $F_2(s)$ ed α, β due costanti reali o complesse. Si ha:

$$\boxed{\mathcal{L}\left[\alpha\, f_1(t) + \beta\, f_2(t)\right] = \alpha\, F_1(s) + \beta\, F_2(s)}$$

Sfruttando la proprietà di linearità e le formule di Eulero di seno e coseno si possono dedurre

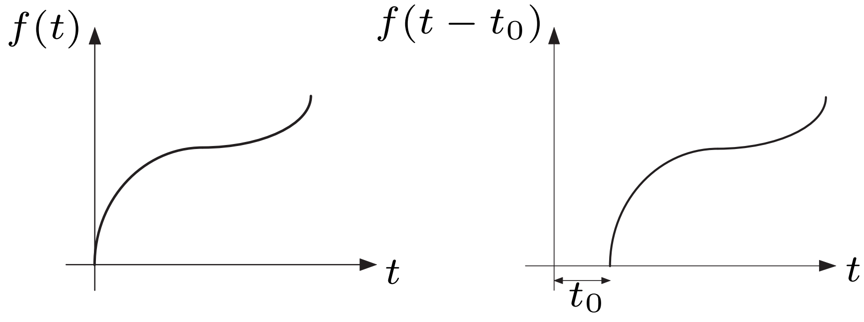
$$\mathcal{L}[\sin \omega t] = \frac{\omega}{s^2+\omega^2} \qquad \mathcal{L}[\cos \omega t] = \frac{s}{s^2+\omega^2}$$

$$\mathcal{L}[\sin \omega t \pm \varphi] = \frac{\omega\, \cos\varphi \pm s\, \sin\varphi}{s^2+\omega^2} \qquad \mathcal{L}[\cos \omega t \pm \varphi] = \frac{s\, \cos\varphi \mp \omega\, \sin\varphi}{s^2+\omega^2}$$

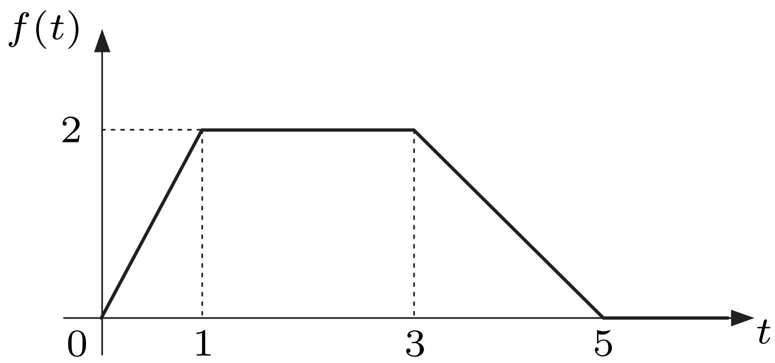
$$\mathcal{L}[e^{at}\, \sin \omega t] = \frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2} \qquad \mathcal{L}[e^{at}\, \cos \omega t] = \frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$$

Teorema della traslazione nel tempo. Sia $f(t)$ una funzione con trasformata $F(s)$ ed $f(t - t_0)$ la funzione traslata in ritardo di un tempo t_0. Si ha:

$$\boxed{\mathcal{L}[f(t - t_0)] = e^{-t_0 s} F(s)}$$



Esempio. Determinare la trasformata di Laplace del segnale seguente



Il segnale $f(t)$ si può scomporre nella somma di quattro rampe, tre delle quali opportunamente ritardate

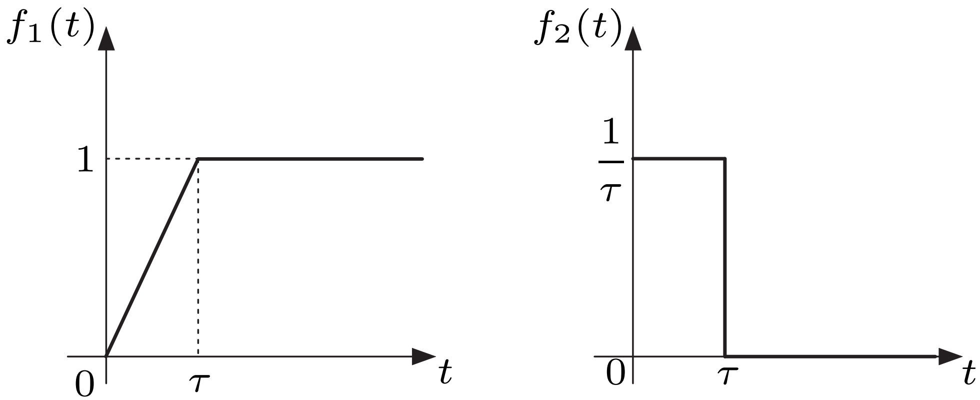
$$f(t) = 2t\, h(t) - 2(t-1)\, h(t-1) - (t-3)\, h(t-3) + (t-5)\, h(t-5).$$

Si ha quindi

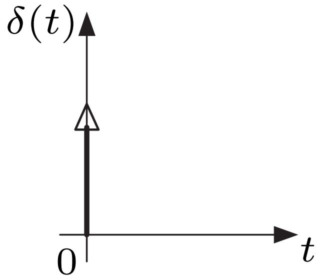
$$F(s) = \frac{1}{s^2}\left(2 - 2\,e^{-s} - e^{-3s} + e^{5s}\right).$$

Impulso di Dirac

Si consideri il segnale $f_1(t)$ e la sua derivata $f_2(t) = \dot{f}_1(t)$:



Per $\tau \longrightarrow 0$ $f_1(t)$ tende al gradino unitario $h(t)$ mentre la sua derivata tende ad un impulso di durata nulla, ampiezza infinita ed area unitaria. Tale impulso è una funzione generalizzata (*distribuzione*) detta ***impulso di Dirac*** e verrà indicata con $\delta(t)$



$$\boxed{\mathcal{L}[\delta(t)] = \lim_{\tau \to 0} F_2(s,\tau) = \lim_{\tau \to 0} \frac{1}{\tau\, s}\left(1 - e^{-\tau\, s}\right) = 1}$$

Siano $\delta(t - t_0)$ l'impulso di Dirac applicato all'istante generico t_0, $t_a < t_0 < t_b$ e $f(t)$ una funzione del tempo. Si ha:

$$\int_{t_a}^{t_b} \delta(t - t_0) dt = 1$$

$$\int_{t_a}^{t_b} f(t)\, \delta(t - t_0) dt = f(t_0)$$

Trasformata della derivata

$$\boxed{\mathcal{L}[\dot f(t)] = s\, F(s) - f(0)}$$

Se $f(t)$ è discontinua in $t = 0$ allora $f(0)$ va interpretata come $f(0^-)$. Generalizzando:

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = s^n\, F(s) - \sum_{i=0}^{n-1} s^i\, \frac{d^{n-i-1} f(t)}{dt^{n-i-1}}\bigg|_{t=0}$$

Trasformata dell'integrale

$$\boxed{\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau)\,d\tau\right] = \frac{1}{s}\,F(s)}$$

Traslazione nel dominio della variabile complessa

$$\mathcal{L}\left[e^{at}\,f(t)\right] = F(s-a)$$

Derivazione nel dominio della variabile complessa

$$\mathcal{L}\left[t\,f(t)\right] = -\frac{dF(s)}{ds}$$

Teorema del valore iniziale. Sia $F(s)$ la trasformata di Laplace di $f(t)$. Se esiste il $\lim_{s\to\infty} s\,F(s)$ si ha

$$f(0) = \lim_{s\to\infty} s\,F(s)$$

Se $f(t)$ è discontinua in $t=0$ allora $f(0)$ va interpretata come $f(0^+)$.

Teorema del valore finale. Sia $F(s)$ la trasformata di Laplace di $f(t)$. Se esiste il $\lim_{t\to\infty} f(t)$ si ha

$$f(\infty) = \lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} s\,F(s)$$

Trasformata del prodotto integrale. Siano $F_1(s)$, $F_2(s)$ le trasformate di Laplace delle funzioni $f_1(t)$, $f_2(t)$. Vale la relazione

$$\mathcal{L}\left[\int_0^{\infty} f_1(\tau)\,f_2(t-\tau)\,d\tau\right] = \mathcal{L}\left[\int_0^{\infty} f_1(t-\tau)\,f_2(\tau)d\tau\right] = F_1(s)\,F_2(s)$$

L'integrale $\int_0^{\infty} f_1(\tau)\,f_2(t-\tau)$ è detto *prodotto integrale* o *prodotto di convoluzione* delle funzioni $f_1(t)$ e $f_2(t)$.

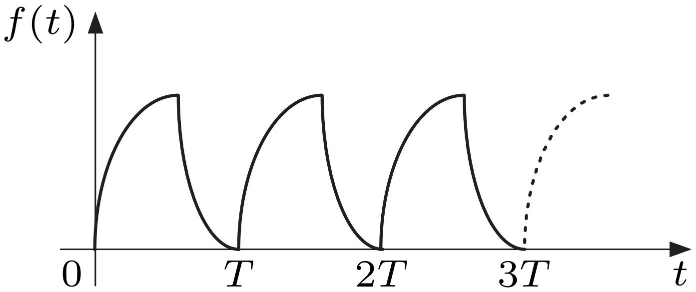
Trasformata di funzioni periodiche. Sia $f(t)$ una funzione periodica di periodo T ($f(t+T) = f(t)$) e sia $f_T(t)$ ristretta al primo periodo

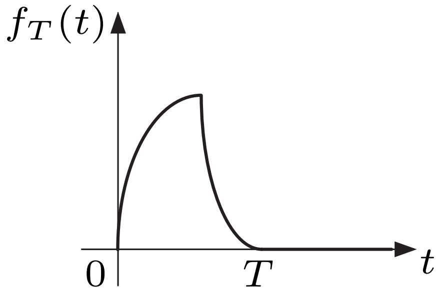
$$f_T(t) = \begin{cases} f(t) & 0 \le t \le T \\ 0 & t > T. \end{cases}$$

Siano $F(s)$ ed $F_T(s)$ le trasformate di Laplace di $f(t)$ ed $f_T(t)$.

Si ha:

$$F(s) = \frac{F_T(s)}{1 - e^{-Ts}}$$





Antitrasformazione di funzioni razionali

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_m\, s^m + b_{m-1}\, s^{m-1} + \cdots + b_1\, s + b_0}{s^n + a_{n-1}\, s^{n-1} + \cdots + a_1\, s + a_0}.$$

Per il teorema fondamentale dell'algebra l'equazione algebrica $D(s) = 0$ ammette sempre n radici reali o complesse. Inoltre, se vi è una radice complessa, è presente pure la sua coniugata. Ai fini dell'antitrasformazione di $F(s)$ distinguiamo tra i seguenti due casi:

1) le radici di $D(s) = 0$ sono tutte distinte;

2) le radici di $D(s) = 0$ non sono tutte distinte cioè sono presenti radici con molteplicità maggiore di 1.

1° caso

$$F(s) = \frac{N(s)}{(s-\lambda_1)\,(s-\lambda_2)\,\cdots\,(s-\lambda_n)}.$$

Espansione in fratti semplici (sviluppo di Heaviside):

$$F(s) = \frac{K_1}{s-\lambda_1} + \frac{K_2}{s-\lambda_2} + \cdots + \frac{K_n}{s-\lambda_n} = \boxed{\sum_{i=1}^{n} \frac{K_i}{(s-\lambda_i)}}$$

$$\boxed{K_i = (s-\lambda_i)\,\frac{N(s)}{D(s)}\bigg|_{s=\lambda_i}}$$

Si ha quindi

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = K_1\,e^{\lambda_1\,t} + K_2\,e^{\lambda_2\,t} + \cdots + K_n\,e^{\lambda_n\,t} = \boxed{\sum_{i=1}^{n} K_i\,e^{\lambda_i\,t}}$$

Le costanti K_i sono dette *residui*.

Esempio 1.

$$F(s)=\frac{5s+3}{(s+1)\,(s+2)\,(s+3)}=\frac{K_1}{s+1}+\frac{K_2}{s+2}+\frac{K_3}{s+3}$$

$$K_1=\left.\frac{5s+3}{(s+2)\,(s+3)}\right|_{s=-1}=-1\qquad K_2=\left.\frac{5s+3}{(s+1)\,(s+3)}\right|_{s=-2}=7\qquad K_3=\left.\frac{5s+3}{(s+1)\,(s+2)}\right|_{s=-3}=-6$$

$$f(t)=-e^{-t}+7\,e^{-2t}-6\,e^{-3t}$$

◇

Se $m=n$ ci si può ricondurre al caso precedente:

$$F(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=b_n+\frac{N'(s)}{D(s)}\quad \text{grado di } N'(s)=n-1$$

$$f(t)=\mathcal{L}^{-1}[F(s)]=b_n\,\delta(0)+\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{N'(s)}{D(s)}\right],$$

dove $\delta(0)$ è l’impulso di Dirac applicato all’istante $t=0$.

I termini relativi a coppie di poli complessi coniugati si possono ricondurre a prodotti di esponenziali reali per funzioni trigonometriche (anche i corrispondenti residui sono complessi coniugati).

$$F(s) = \frac{K}{s-\sigma-j\,\omega} + \frac{\bar{K}}{s-\sigma+j\,\omega} = \frac{\rho\, e^{j\,\varphi}}{s-\sigma-j\,\omega} + \frac{\rho\, e^{-j\,\varphi}}{s-\sigma+j\,\omega}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}[F(s)] &= \rho\,\left(e^{\sigma\,t+j\,(\omega\,t+\varphi)} + e^{\sigma\,t-j\,(\omega\,t+\varphi)}\right)\\ &= 2\,\rho\, e^{\sigma\,t}\cos\left(\omega\,t+\varphi\right) = 2\,\rho\, e^{\sigma\,t}\sin\left(\omega\,t+\varphi+\frac{\pi}{2}\right)\end{aligned}$$

Esempio 2.

$$F(s) = \frac{7s^2-8s+5}{s\,(s^2+2s+5)} = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s+1-j2} + \frac{K_3}{s+1+j2}$$

$$K_1 = \left.\frac{7s^2-8s+5}{s^2+2s+5}\right|_{s=0} = 1 \quad K_2 = \left.\frac{7s^2-8s+5}{s\,(s+1+j2)}\right|_{s=-1+j2} = 3+j4 \quad K_3 = \left.\frac{7s^2-8s+5}{s\,(s+1-j2)}\right|_{s=-1-j2} = 3-j4$$

$$f(t) = 1 + 10\,e^{-t}\,\cos\left(2t+\varphi\right) \qquad \varphi = \arctan\,\left(\frac{4}{3}\right)$$

2° caso

$$F(s)=\frac{N(s)}{(s-\lambda_1)^{n_1}(s-\lambda_2)^{n_2}\cdots(s-\lambda_h)^{n_h}},\qquad \sum_{i=1}^{h} n_i = n$$

L'espansione in fratti semplici si generalizza nel modo seguente:

$$F(s)=\frac{K_{11}}{s-\lambda_1}+\frac{K_{12}}{(s-\lambda_1)^2}+\cdots+\frac{K_{1n_1}}{(s-\lambda_1)^{n_1}}+\cdots+\frac{K_{h1}}{s-\lambda_h}+\cdots+\frac{K_{hn_h}}{(s-\lambda_h)^{n_h}}$$

$$=\boxed{\sum_{i=1}^{h}\sum_{j=1}^{n_i}\frac{K_{ij}}{(s-\lambda_i)^j}}$$

dove

$$\boxed{K_{ij}=\frac{1}{(n_i-j)!}\left\{\frac{d^{n_i-j}}{ds^{n_i-j}}\left[(s-\lambda_i)^{n_i}F(s)\right]\right\}_{s=\lambda_i}}$$

Si ha quindi

$$f(t)=\mathcal{L}^{-1}[F(s)]=K_{11}\,e^{\lambda_1 t}+K_{12}\,t\,e^{\lambda_1 t}+\cdots+K_{1n_1}\,t^{n_1-1}\,e^{\lambda_1 t}+\cdots=\boxed{\sum_{i=1}^{h}\sum_{j=1}^{n_i}\frac{K_{ij}\,t^{j-1}\,e^{\lambda_i t}}{(j-1)!}}$$

Esempio 3.

$$F(s) = \frac{s+2}{s^2\,(s+1)^2} = \frac{K_{11}}{s} + \frac{K_{12}}{s^2} + \frac{K_{21}}{s+1} + \frac{K_{22}}{(s+1)^2}$$

$$K_{11} = \left.\frac{-s-3}{(s+1)^3}\right|_{s=0} = -3 \qquad K_{12} = \left.\frac{(s+2)}{(s+1)^2}\right|_{s=0} = 2 \qquad K_{21} = \left.\frac{-s-4}{s^3}\right|_{s=-1} = 3 \qquad K_{22} = \left.\frac{s+2}{s^2}\right|_{s=-1} = 1$$

$$f(t) = -3 + 2\,t + 3\,e^{-t} + t\,e^{-t}.$$

$\diamond$

Soluzione di equazioni differenziali lineari

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1}\,\frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1\,\frac{dy(t)}{dt} + a_0\,y(t) = b_m\,\frac{d^m u(t)}{dt^m} + \cdots + b_1\,\frac{du(t)}{dt} + b_0\,u(t)$$

$$y(0),\ \left.\frac{dy(t)}{dt}\right|_{t=0},\ \ldots,\ \left.\frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}}\right|_{t=0} \qquad \text{note}$$

Trasformando secondo Laplace ambo i membri si ottiene (ricordare la trasformata della derivata rispetto al tempo di ordine generico):

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \, s^i \, Y(s) - \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{j=0}^{i-1} s^j \left. \frac{d^{i-j-1} y(t)}{dt^{i-j-1}} \right|_{t=0} = \sum_{i=0}^{m} b_i \, s^i \, U(s)$$

Si ha dunque

$$Y(s) = Y_\ell(s) + Y_f(s)$$

dove

$$Y_\ell(s) = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{j=0}^{i-1} s^j \left. \frac{d^{i-j-1} y(t)}{dt^{i-j-1}} \right|_{t=0}}{\sum_{i=0}^{n} a_i \, s^i} \qquad Y_f(s) = \frac{\sum_{i=0}^{m} b_i \, s^i}{\sum_{i=0}^{n} a_i \, s^i} \, U(s).$$

Antitrasformando

$$y(t) = y_\ell(t) + y_f(t),$$

dove $y_\ell(t)$ è la risposta libera (ingresso applicato nullo) e $y_f(t)$ è la risposta forzata (condizioni iniziali nulle). La risposta libera si ottiene sempre antitrasformando una funzione razionale fratta.

Esempio 1.

$$\ddot{y}(t) + 3\,\dot{y}(t) + 2\,y(t) = (1+3t)\,h(t), \qquad y(0) = 1,\ \dot{y}(0) = 2$$

Trasformando

$$\left(s^2 + 3s + 2\right)\,Y(s) - s - 5 = \frac{1}{s} + \frac{3}{s^2}$$

$$Y_\ell(s) = \frac{s+5}{s^2+3s+2} = \frac{4}{s+1} - \frac{3}{s+2}$$

$$Y_f(s) = \frac{s+3}{s^2\,(s^2+3s+2)} = -\frac{7}{4}\,\frac{1}{s} + \frac{3}{2}\,\frac{1}{s^2} + \frac{2}{s+1} - \frac{1}{4}\,\frac{1}{s+2}$$

Antitrasformando

$$y(t) = \underbrace{4\,e^{-t} - \ 3\,e^{-2t}}_{y_\ell(t)}\,\underbrace{-\frac{7}{4} + \frac{3}{2}\,t + 2\,e^{-t} - \frac{1}{4}\,e^{-2t}}_{y_f(t)}$$

$$= -\frac{7}{4} + \frac{3}{2}\,t + 6\,e^{-t} - \frac{13}{4}\,e^{-2t}$$

Utilizzando le trasformate di derivata ed integrale è possibile risolvere anche equazioni integro–differenziali.

Esempio 2.

$$a \int_0^t y(t)\, dt + b\, y(t) + \dot{y}(t) = c\, \dot{u}(t)$$

$$\Downarrow$$

$$a\, \frac{Y(s)}{s} + b\, Y(s) + s\, Y(s) - y(0) = c\, s\, U(s)$$

$$\Downarrow$$

$$a\, Y(s) + b\, s\, Y(s) + s^2\, Y(s) - s\, y(0) = c\, s^2\, U(s)$$

$$\Downarrow$$

$$\left(a + bs + s^2\right)\, Y(s) = s\, y(0) + c\, s^2\, U(s)$$

$$\Downarrow$$

$$Y(s) = \frac{s}{s^2 + bs + a}\, y(0) + \frac{c\, s^2}{s^2 + bs + a}\, U(s)$$

Funzione di trasferimento

Se le condizioni iniziali dell'equazione differenziale sono tutte nulle si ha

$$Y(s) = Y_f(s) = \frac{\sum_{i=0}^{m} b_i\, s^i}{\sum_{i=0}^{n} a_i\, s^i}\, U(s).$$

La funzione razionale fratta

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{\sum_{i=0}^{m} b_i\, s^i}{\sum_{i=0}^{n} a_i\, s^i} = \frac{b_m\, s^m + b_{m-1}\, s^{m-1} + \cdots + b_1\, s + b_0}{s^n + a_{n-1}\, s^{n-1} + \cdots + a_1\, s + a_0}$$

è detta funzione di trasferimento.

$n - m$ è detto *grado relativo* di $G(s)$ (se nullo, il sistema è non puramente dinamico).

La funzione di trasferimento è una proprietà del sistema (indipendente dal segnale di ingresso). Se $G(s)$ è nota, è possibile determinare la risposta forzata del sistema antitrasformando la relazione

$$\boxed{Y(s) = G(s)\, U(s)}$$

Se applichiamo come ingresso l'impulso di Dirac $\delta(t)$ otteniamo

$$Y(s) = G(s)$$

dunque l'antitrasformata $g(t)$ della funzione di trasferimento rappresenta la *risposta impulsiva* del sistema. Essa si determina antitrasformando una funzione razionale fratta.

Per un ingresso qualunque, utilizzando la trasformata del prodotto di convoluzione

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)\,U(s)] = \int_0^{\infty} g(\tau)\,u(t-\tau)\,d\tau = \int_0^{\infty} g(t-\tau)\,u(\tau)\,d\tau.$$

Poiché $u(t) = 0$ per $t < 0$ e $g(t) = 0$ per $t < 0$ si ha

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)\,U(s)] = \int_0^{t} g(\tau)\,u(t-\tau)\,d\tau = \int_0^{t} g(t-\tau)\,u(\tau)\,d\tau.$$

Dalla conoscenza della risposta impulsiva si può risalire alla risposta a qualunque segnale di ingresso $\Longrightarrow$ la risposta impulsiva caratterizza completamente il comportamento dinamico del sistema. Anche la funzione di trasferimento $G(s)$ caratterizza completamente il comportamento dinamico del sistema avendo lo stesso contenuto informativo di $g(t)$.

La $G(s)$ può essere fattorizzata ottenendo

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_m\,(s-z_1)\,(s-z_2)\,\cdots\,(s-z_m)}{(s-p_1)\,(s-p_2)\,\cdots\,(s-p_n)}.$$

$z_1, z_2, \ldots, z_m$ (radici dell'equazione $N(s) = 0$) sono detti *zeri* mentre $p_1, p_2, \ldots, p_n$ (radici dell'equazione $D(s) = 0$) sono detti *poli*.

Ricordando le regole di antitrasformazione delle funzioni razionali fratte si ha:

- se tutti i poli sono distinti l'antitrasformata di $G(s)$ è una combinazione lineare di termini del tipo

$$K, \quad K\,e^{p_i\,t}, \quad K\,e^{\sigma_i\,t}\cos\left(\omega_i\,t + \varphi_i\right), \tag{1}$$

  dove l'ultimo termine corrisponde alla coppia di poli complessi coniugati $p_i = \sigma_i + j\,\omega_i$, $\bar{p}_i = \sigma_i - j\,\omega_i$.

- se ci sono poli multipli, ai termini sopra si aggiungono termini del tipo

$$K\,t^k, \quad K\;t^k\,e^{p_i\,t}, \quad K\,t^k\,e^{\sigma_i\,t}\cos\left(\omega_i\,t + \varphi_i\right). \tag{2}$$

I termini sopra sono detti *modi del sistema*.

Esempio 3.

$$G(s) = \frac{2s+3}{s^2+7s+10} = \frac{2\,(s+\frac{3}{2})}{(s+2)\,(s+5)}$$

poli: $p_1 = -2,\ p_2 = -5$ zeri: $z_1 = -\frac{3}{2}$

modi del sistema: $e^{-2t},\ e^{-5t}$

Risposta impulsiva:

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[-\frac{1/3}{s+2} + \frac{7/3}{s+5}\right] = -\frac{1}{3}\,e^{-2t} + \frac{7}{3}\,e^{-5t}$$

Risposta al gradino unitario a partire da condizioni iniziali nulle:

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}[G(s)\,U(s)] = \mathcal{L}^{-1}[G(s)\,\frac{1}{s}] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1/6}{s+2} - \frac{7/15}{s+5} + \frac{3/10}{s}\right] \\ &= \frac{1}{6}\,e^{-2t} - \frac{7}{15}\,e^{-5t} + \frac{3}{10} \end{aligned}$$

Risposta a regime

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \frac{3}{10} = \lim_{s\to 0} s\,G(s)\,U(s) \ \ \text{(teorema del valore finale)}$$

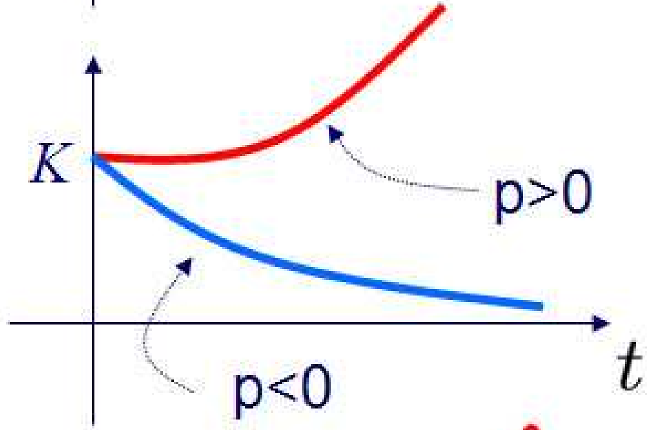
- I modi dipendono dai poli di $G(s)$ ma la risposta del sistema è influenzata anche dagli zeri. Infatti, i coefficienti della combinazione lineare dei modi (residui) sono influenzati dagli zeri.
- L'ingresso può contribuire alla risposta con termini aggiuntivi detti *modi dell'ingresso* che si aggiungono ai modi naturali del sistema (nell'Esempio 1 di pag. 21 i termini costante e rampa della risposta forzata sono stati introdotti dall'ingresso).
- L'ingresso può contribuire alla risposta anche aumentando la molteplicità di alcuni modi naturali del sistema, eliminando il contributo di alcuni modi naturali o l'effetto degli zeri.
- I modi di tipo (1) per t tendente all'infinito: tendono a zero se la parte reale del relativo polo è negativa, restano limitati se è nulla e divergono se è positiva.
  I modi di tipo (2) per t tendente all'infinito: tendono a zero se la parte reale del relativo polo è negativa (l'esponenziale prevale sulla potenza) e divergono se essa è nulla o positiva.

polo reale nell'origine

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{K}{s}\right] = K$$

polo reale

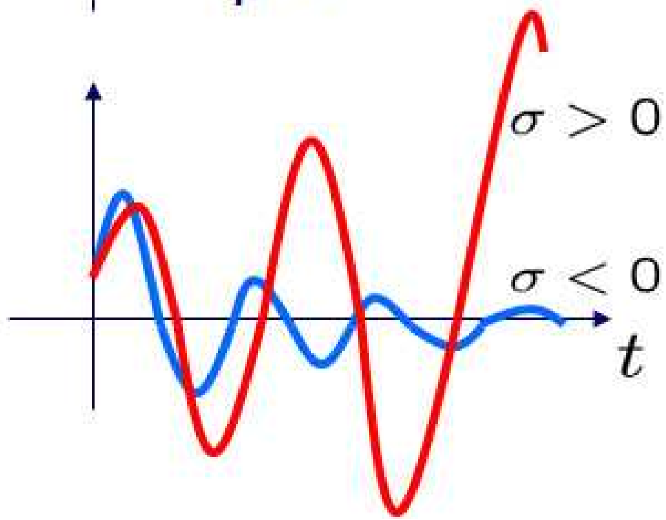
$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{K}{s-p}\right] = K\,e^{pt}$$

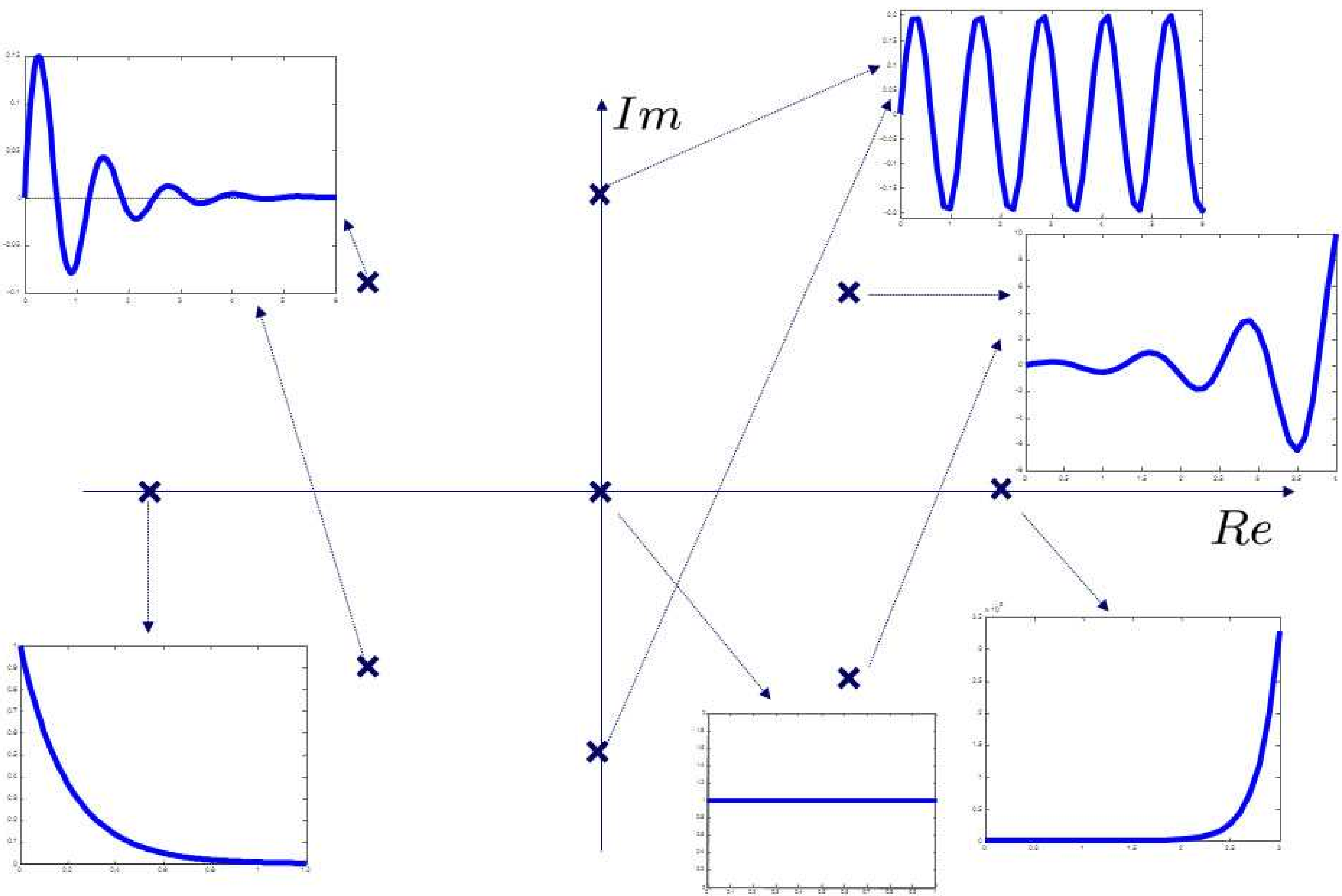


coppia di poli complessi coniugati

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{K}{s-\sigma-j\,\omega}+\frac{\bar{K}}{s-\sigma+j\,\omega}\right]$$

$$= M\,e^{\sigma\,t}\cos\left(\omega\,t+\varphi\right)$$




Im
Re

poli reali nell'origine

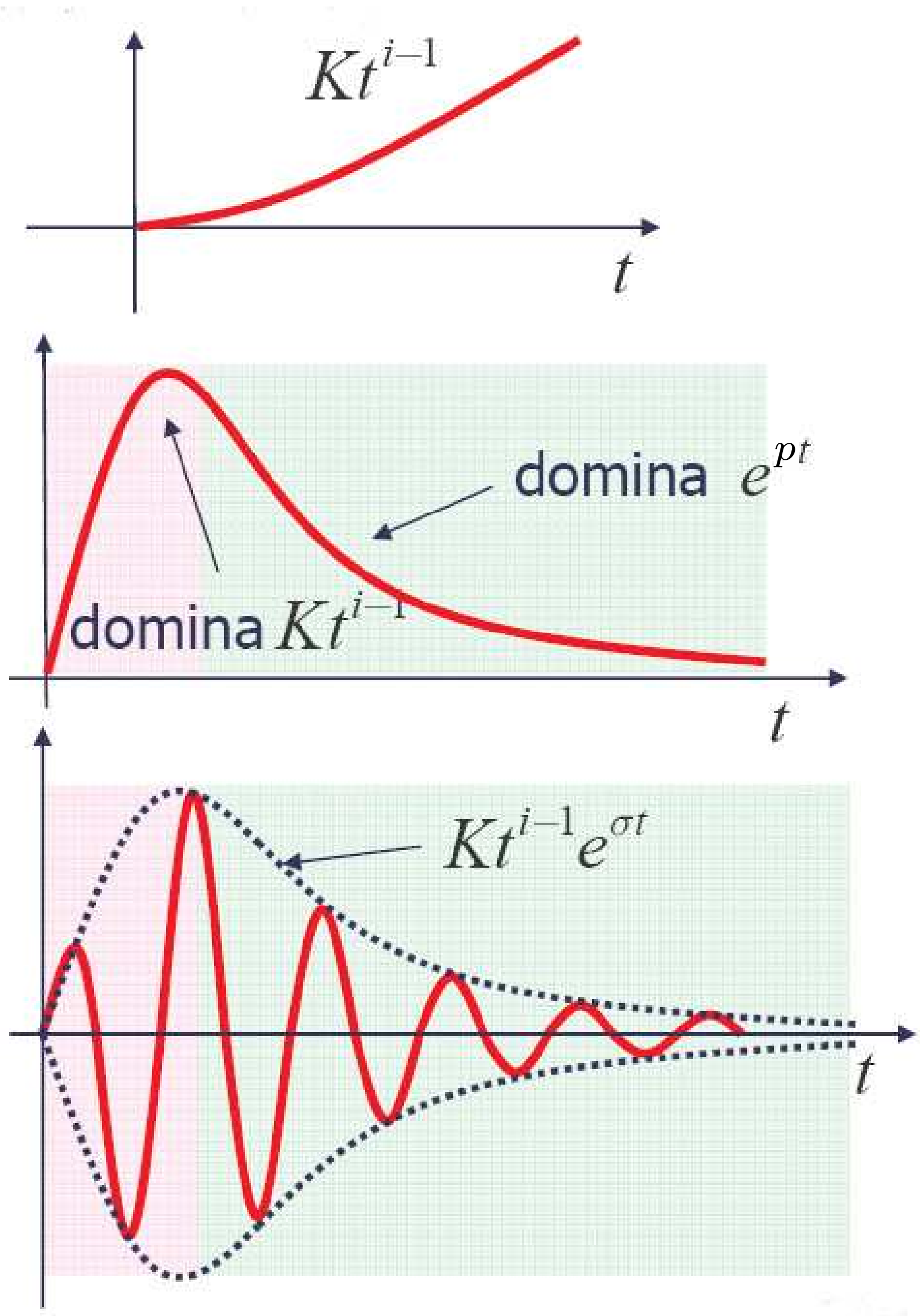
$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{K}{s^r}\right] = \sum_{i=1}^{r} K_i\, t^{i-1}$$

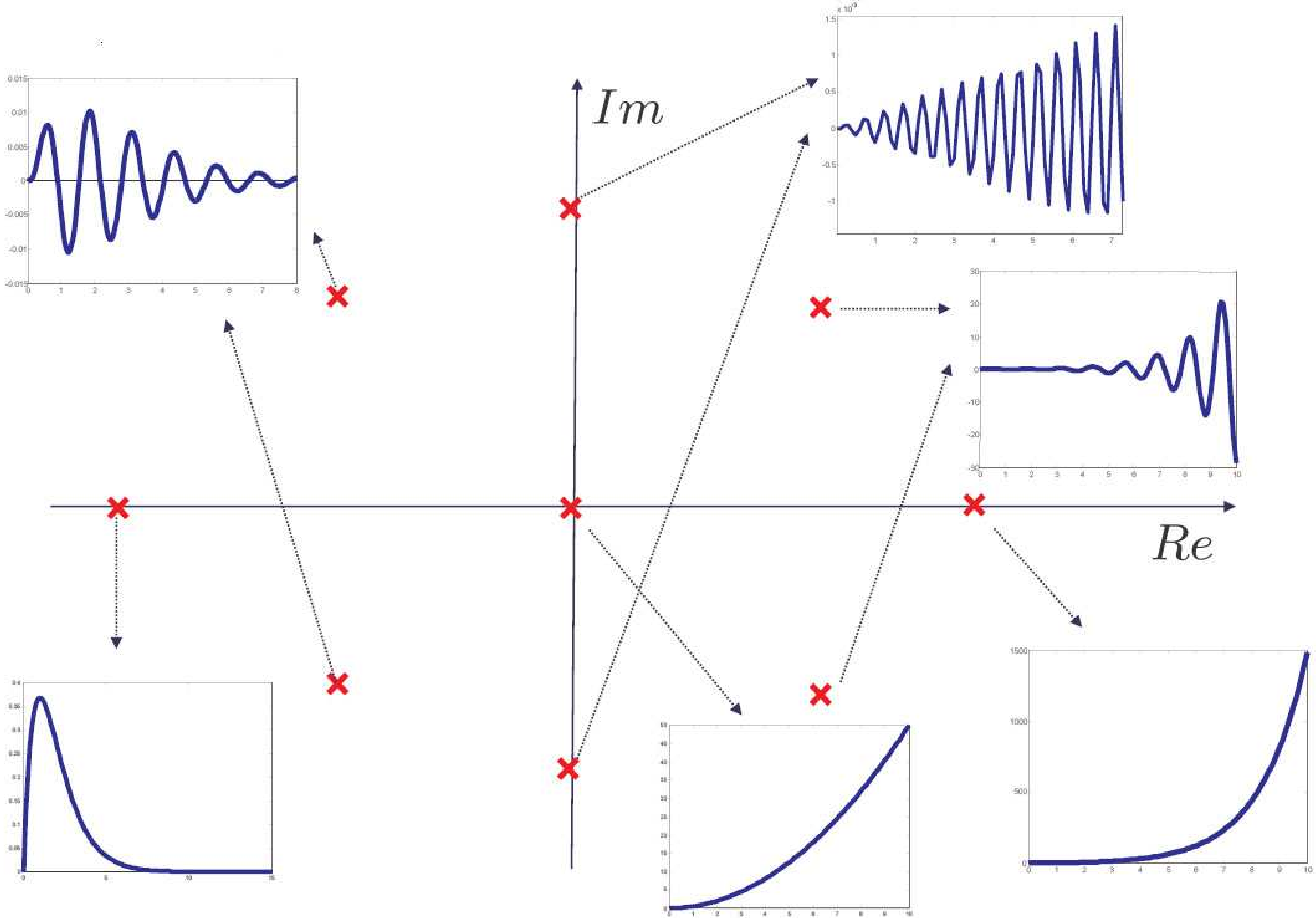
poli reali

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{K}{(s-p)^r}\right] = \sum_{i=1}^{r} K_i\, t^{i-1}\, e^{pt}$$

coppia di poli complessi coniugati

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\left(\frac{K}{s-\sigma-j\,\omega} + \frac{\bar{K}}{s-\sigma+j\,\omega}\right)^r\right]$$
$$= \sum_{i=1}^{r} M_i\, t^{i-1}\, e^{\sigma\, t} \cos\left(\omega\, t + \varphi\right)$$




Im
Re

Soluzione di una equazione differenziale di ordine n: riepilogo

$$Y(s) = Y_\ell(s) + Y_f(s) = \frac{N_\ell(s)}{D(s)} + G(s)\,U(s) = \frac{N_\ell(s)}{D(s)} + \frac{N(s)}{D(s)}\,U(s)$$

$$y(t) = y_\ell(t) + y_f(t) = \text{risposta libera} + \text{risposta forzata}$$

- $D(s)$: polinomio monico di grado n, le radici di $D(s) = 0$ sono i poli e determinano i modi del sistema.
- $N_\ell(s)$: polinomio di grado massimo $n-1$, i suoi coefficienti dipendono dalle condizioni iniziali $y(0), \dot{y}(0), \ddot{y}(0)$...
- Se $y(t)$ è discontinua in $t = 0$ le condizioni iniziali vanno considerate al tempo $t = 0^-$.
- $N(s)$: polinomio di grado m con $m \leq n$ (sistemi causali), le radici di $N(s) = 0$ sono gli zeri.
- Nella risposta forzata si possono distinguere le dinamiche proprie del sistema $N(s)/D(s)$ dal contributo dell'ingresso $U(s)$.
- $\mathcal{L}^{-1}[G(s)] = g(t)$ è la risposta del sistema all'impulso di Dirac $\delta(t)$.

Modelli nello spazio degli stati: determinazione di moto e risposta

Modello di ordine $n = 1$ con un ingresso ed una uscita:

$$\dot{x}(t) = a\,x(t) + b\,u(t) \quad x(0) = x_0 \tag{3}$$

$$y(t) = c\,x(t) + d\,u(t) \tag{4}$$

Applicando la trasformata di Laplace all'equazione di stato

$$s\,X(s) - x_0 = a\,X(s) + b\,U(s) \quad \Rightarrow \quad X(s) = \frac{x_0}{s-a} + \frac{b}{s-a}U(s)$$

Antitrasformando ed utilizzando la trasformata del prodotto di convoluzione

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X(s)] = e^{at}\,x_0 + \int_0^t b\,e^{a\,(t-\tau)}u(\tau)\,d\tau \tag{5}$$

Sostituendo la (5) nella (4) si ottiene

$$y(t) = c\,e^{at}\,x_0 + c\int_0^t b\,e^{a\,(t-\tau)}u(\tau)\,d\tau + d\,u(t) \tag{6}$$

Sia nel moto che nella risposta si distinguono chiaramente le parti libera e forzata.

Trasformando l'uscita

$$Y(s) = c\,X(s) + d\,U(s) = \frac{c\,x_0}{s-a} + \frac{c\,b}{s-a}\,U(s) + d\,U(s)$$

che, antitrasformata, consente di ottenere direttamente la (6). Applicando l'impulso di Dirac $\delta(t)$ e ricordandone le proprietà si ottiene la risposta impulsiva

$$g(t) = c\,e^{at}\,b + d\,\delta(t).$$

Come estendere il risultato ad un modello di ordine n qualunque con r ingressi ed m uscite?

$$\dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,u(t) \quad x(0) = x_0 \tag{7}$$

$$y(t) = C\,x(t) + D\,u(t) \tag{8}$$

In tal caso

$$X(s) = \begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \\ \vdots \\ X_n(s) \end{bmatrix} \qquad U(s) = \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \\ \vdots \\ U_r(s) \end{bmatrix} \qquad Y(s) = \begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \\ \vdots \\ Y_m(s) \end{bmatrix}$$

Trasformando la (7)

$$s\,X(s) - x_0 = A\,X(s) + B\,U(s) \quad \Rightarrow \quad (s\,I - A)\;X(s) = x_0 + B\,U(s)$$

con I matrice identità $n \times n$, dunque

$$X(s) = (s\,I - A)^{-1}\,x_0 + (s\,I - A)^{-1}\,B\,U(s)$$

Nel caso scalare

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-a}\right] = e^{at} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a^i\,t^i}{i!} = 1 + a\,t + \frac{a^2\,t^2}{2} + \frac{a^3\,t^3}{6} + \cdots$$

Per il caso vettoriale, è possibile definire ***l'esponenziale di matrice***:

$$e^{At} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i\,t^i}{i!} = I + A\,t + \frac{A^2\,t^2}{2} + \frac{A^3\,t^3}{6} + \cdots$$

e dunque

$$\mathcal{L}^{-1}\left[(s\,I - A)^{-1}\right] = e^{At}$$

Il moto assume dunque l'espressione

$$\boxed{x(t) = e^{At} x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B\, u(\tau)\, d\tau}$$

mentre la risposta diventa

$$\boxed{y(t) = C\, e^{At} x_0 + C \int_0^t e^{A(t-\tau)} B\, u(\tau)\, d\tau + D\, u(t)}$$

Se $x_0 = 0$ e $u_1(t) = u_2(t) = \cdots = u_r(t) = \delta(t)$ si ha

$$\boxed{G(t) = C\, e^{At} B + D\, \delta(t)}.$$

In questo caso, la risposta impulsiva $G(t)$ è una matrice $m \times r$ il cui elemento generico $g_{ij}(t)$ rappresenta l'effetto dell'ingresso j–esimo sulla i–esima uscita.

Proprietà dell'esponenziale di matrice

1. $\frac{d}{dt}\left(e^{At}\right) = A\,e^{At}$
2. $e^{A(t_1+t_2)} = e^{At_1}e^{At_2}$
3. $\left(e^{At}\right)^{-1} = e^{-At}$ (e^{At} è sempre invertibile)
4. $\left(e^{At}\right)^{k} = e^{Akt}$, k scalare
5. In generale $e^{(A+B)t} \neq e^{At}e^{Bt}$. L'uguaglianza si ha se e solo se $AB = BA$
6. $A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} \implies e^{At} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & \\ & e^{\lambda_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$
7. $A = \begin{bmatrix} A_{11} & & & \\ & A_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_{nn} \end{bmatrix} \implies e^{At} = \begin{bmatrix} e^{A_{11} t} & & & \\ & e^{A_{22} t} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{A_{nn} t} \end{bmatrix}$

Calcolo dell'esponenziale di matrice

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\left[(sI - A)^{-1}\right],$$

$$(sI - A)^{-1} = \frac{\text{agg }(sI - A)}{\det\,(sI - A)}.$$

- $\text{agg}(sI - A)$ è l'aggiunta della matrice $(sI - A)$, ovvero la trasposta della matrice dei complementi algebrici.
- Gli elementi di $(sI - A)^{-1}$ sono rapporti di polinomi in s. I polinomi a numeratore hanno grado massimo $n - 1$.
- $\det(sI - A)$ è un polinomio di grado n.
- Calcolare e^{At} significa dunque antitrasformare delle funzioni razionali fratte.
- Le radici di $\det(\lambda I - A) = 0$ sono gli autovalori di A e determinano i modi del sistema.
- Gli elementi di e^{At} sono combinazioni lineari dei modi del sistema.

.

Esempio 1.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}$$

$$s\,I - A = \begin{bmatrix} s-3 & 2 \\ -5 & s+4 \end{bmatrix} \qquad \det\left(sI - A\right) = s^2 + s - 2 = (s+2)\,(s-1)$$

$$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{s+4}{(s+2)\,(s-1)} & -\frac{2}{(s+2)\,(s-1)} \\ \frac{5}{(s+2)\,(s-1)} & \frac{s-3}{(s+2)\,(s-1)} \end{bmatrix}$$

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\left[(sI - A)^{-1}\right] = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3}\,e^{-2t} + \frac{5}{3}\,e^{t} & \frac{2}{3}\,\left(e^{-2t} - e^{t}\right) \\ \frac{5}{3}\,\left(-e^{-2t} + e^{t}\right) & \frac{5}{3}\,e^{-2t} - \frac{2}{3}\,e^{t} \end{bmatrix}$$

Modi del sistema: e^{-2t}, e^{t}

Esempio 2.

$$\dot{x}(t) = A\,x(t), \qquad A = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Calcolare il valore dello stato iniziale x_0 sapendo che all'istante $t_f = 2$ sec. risulta $x(t_f) = x_f = [\,0\ 1\,]^T$.

$$x_f = e^{At_f}\,x_0 \quad \Rightarrow \quad x_0 = \left(e^{At_f}\right)^{-1} x_f$$

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{-3t} & 0 \\ \frac{1}{5}\left(e^{2t} - e^{-3t}\right) & e^{2t} \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \left(e^{At}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} e^{3t} & 0 \\ \frac{1}{5}\left(e^{-2t} - e^{3t}\right) & e^{-2t} \end{bmatrix}$$

Si ha quindi

$$x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ e^{-4} \end{bmatrix}.$$

Esempio 3. Per il sistema avente matrici

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix},$$

determinare l'insieme degli stati iniziali a partire dai quali la risposta libera tende asintoticamente a zero.

$$y_\ell(t) = C\, e^{At}\, x_0, \qquad x_0 = \begin{bmatrix} x_{01} \; x_{02} \end{bmatrix}^T$$

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{-3t} & \frac{1}{5}\left(e^{2t} - e^{-3t}\right) \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad y_\ell(t) = e^{-3t}\, x_{01} + \frac{1}{5}\left(e^{2t} - e^{-3t}\right)\, x_{02}$$

L'insieme cercato è dunque del tipo

$$x_0 = \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \alpha \in \mathcal{R}.$$

Esempio 4.

Calcolare la risposta al gradino $u(t) = \bar{u}\, h(t)$ di un sistema SISO di ordine n.

$$
\begin{aligned}
y(t) &= C\, e^{At} x_0 + C \int_0^t e^{A(t-\tau)} B\, \bar{u}\, d\tau + D\, \bar{u} \\
&= C\, e^{At} x_0 - C \int_t^0 e^{A\xi}\, d\xi \;\; B\, \bar{u} + D\, \bar{u} \\
&= C\, e^{At} x_0 + C \int_0^t e^{A\tau}\, d\tau \;\; B\, \bar{u} + D\, \bar{u} \\
&= C\, e^{At} x_0 + C \left[A^{-1} e^{A\tau} \right]_0^t B\, \bar{u} + D\, \bar{u} \\
&= C\, e^{At} x_0 + C\, A^{-1} \left(e^{At} - I \right) B\, \bar{u} + D\, \bar{u}.
\end{aligned}
$$

Modelli di stato e modi del sistema.

Polinomio caratteristico di A:

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$$

- Se le radici di $p(\lambda) = 0$ (autovalori di A) sono tutte distinte i modi del sistema di ricavano direttamente da $p(\lambda)$.
- Se vi sono radici multiple di $p(\lambda) = 0$ la conoscenza di $p(\lambda)$ non consente sempre di determinare tutti i modi del sistema.
- Nel calcolo di $(\lambda I - A)^{-1}$ vi possono infatti essere cancellazioni polo/zero e il grado massimo dei denominatori degli elementi di tale matrice può essere inferiore ad n.

Esempio 1.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \lambda I - A = \begin{bmatrix} \lambda+2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda+2 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda+2 \end{bmatrix}$$

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - A) = (\lambda+2)^3$$

$$(\lambda I - A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda+2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda+2} & 0 \\ \frac{1}{(\lambda+2)^2} & 0 & \frac{1}{\lambda+2} \end{bmatrix}$$

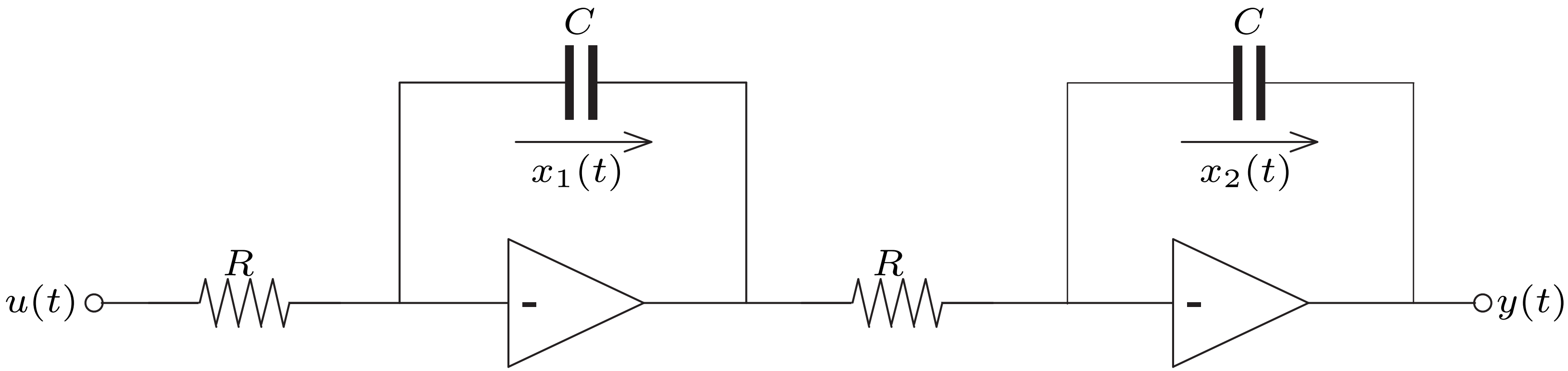
modi del sistema: e^{-2t}, $t\,e^{-2t}$ ◇

I modi del sistema si possono ricavare direttamente conoscendo il minimo comune multiplo $m(\lambda)$ dei denominatori degli elementi della matrice $(\lambda\, I - A)^{-1}$ (nell'esempio sopra $(\lambda + 2)^2$). Tale minimo comune multiplo è detto polinomio minimo di A.

Il polinomio minimo:

- è unico se considerato monico;
- è un divisore del polinomio caratteristico;
- ha come radici tutti gli autovalori di A;
- la molteplicità dell'autovalore i–esimo nel polinomio minimo è minore od uguale a quella nel polinomio caratteristico.

Esempio 2: integratori in cascata

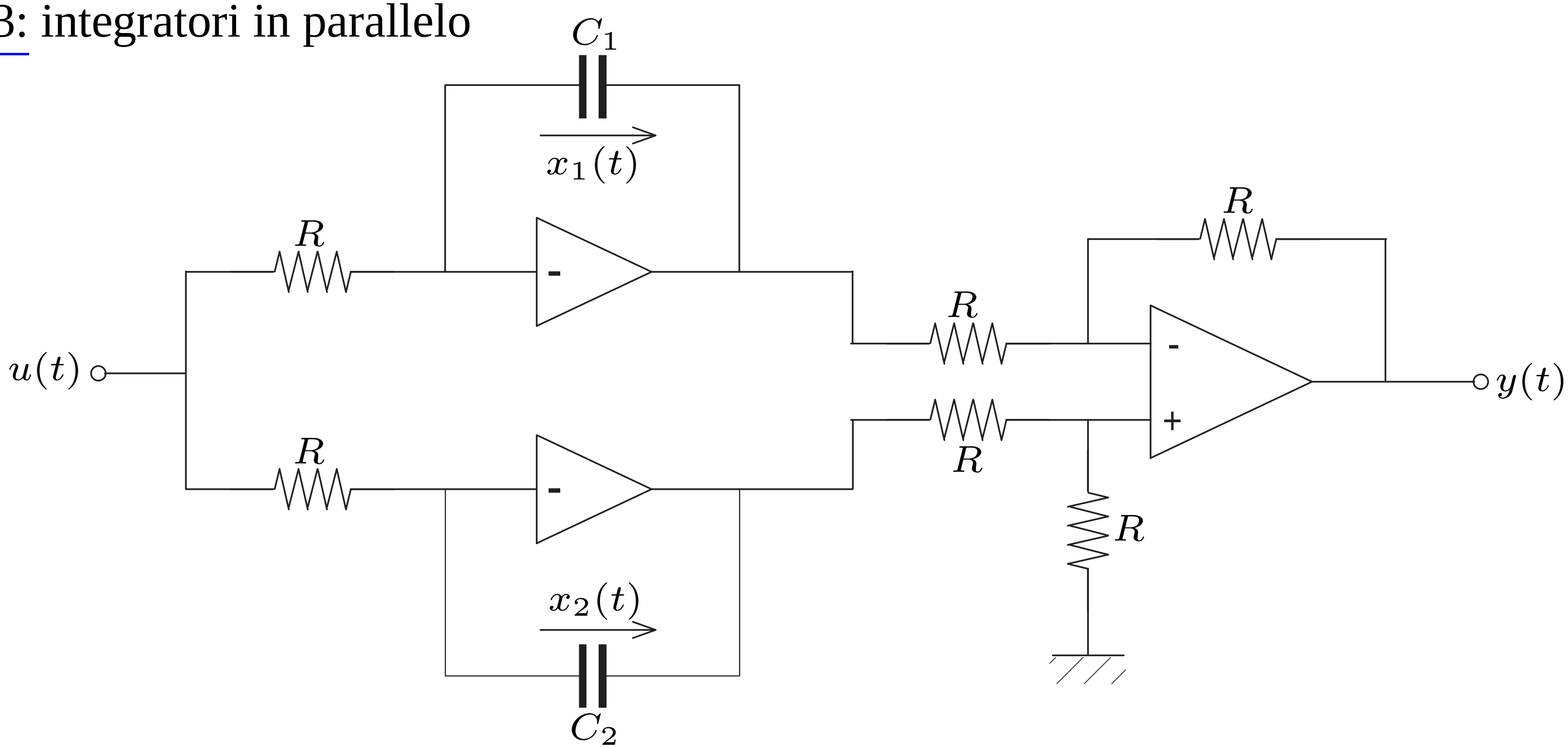


$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\dfrac{u}{RC} \\ \dot{x}_2 = -\dfrac{x_1}{RC} \end{cases} \qquad y = x_2$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{1}{RC} & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -\frac{1}{RC} \\ 0 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda I - A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ \frac{1}{RC} & \lambda \end{bmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad p(\lambda) = m(\lambda) = \lambda^2$$

Esempio 3: integratori in parallelo



$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\dfrac{u}{R\,C_1} \\ \dot{x}_2 = -\dfrac{u}{R\,C_2} \end{cases} \qquad y = -x_1 + x_2$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R\,C_1} \\ -\frac{1}{R\,C_2} \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \lambda I - A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

$$p(\lambda) = \lambda^2, \qquad m(\lambda) = \lambda$$