Modellistica di sistemi a fluido

I fluidi vengono suddivisi in *liquidi* e *gas*.

Liquidi: sono sempre delimitati da una superficie ben definita, possiedono un volume proprio ma non una forma propria.

Gas: sono costituiti da molecole in moto che urtano tra loro e tendono a disperdersi, non hanno né forma né volume proprio ed occupano tutto lo spazio loro consentito.

Densità: è la massa dell'unità di volume. In genere dipende da pressione e temperatura del fluido:

$$\rho = \frac{m}{V} = \rho\,(P, T).$$

Coefficiente di comprimibilità: è l'opposto della variazione relativa di volume che subisce un volumetto di fluido in conseguenza di una variazione unitaria di pressione:

$$\chi = -\frac{1}{V}\,\frac{\partial V}{\partial P} = \frac{1}{\rho}\,\frac{\partial \rho}{\partial P}.$$

Il coefficiente di comprimibilità dipende dalla temperatura.

Più utilizzato in letteratura è il suo inverso, detto **bulk modulus**:

$$\beta = \frac{1}{\chi} = -V\,\frac{\partial P}{\partial V} = \rho\,\frac{\partial P}{\partial \rho}.$$

Coefficiente di dilatazione termica: è la variazione relativa di volume che subisce un volumetto di fluido in conseguenza di una variazione unitaria di temperatura:

$$\alpha = \frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial T} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial T}.$$

Coefficiente di viscosità dinamica. A differenza di quanto avviene nei solidi, il moto di un fluido avviene per scorrimento di strati uno sull'altro. Nello scorrere l'uno sull'altro gli strati meno veloci della corrente oppongono, per attrito, una resistenza al trascinamento sugli strati più veloci che scorrono su di essi. La resistenza all'avanzamento per unità di superficie è proporzionale al gradiente verticale di velocità secondo un coefficiente μ detto *coefficiente di viscosità dinamica* del fluido:

$$\tau = -\frac{dF}{dS} = -\mu\,\frac{\partial v}{\partial z}. \tag{1}$$

Fluidi perfetti: $\mu = 0$ (assenza di attriti).

Fluidi newtoniani: μ dipende solo dalla natura del fluido e dal suo stato fisico. In genere la pressione ha poca influenza su μ mentre assume una certa importanza la sua dipendenza dalla temperatura $\Longrightarrow$ la (1) diventa legge fisica.

Linee di corrente o di flusso: linee tracciate entro il fluido in moto la cui caratteristica è di avere in ogni punto la tangente coincidente con la direzione del vettore velocità.

Moto laminare: le linee di corrente mantengono la loro individualità nello spazio e nel tempo. Le forze di attrito prevalgono su quelle di inerzia.

Moto turbolento: le particelle di fluido si mescolano anche a livello macroscopico e le linee di corrente perdono la propria individualità. La direzione e l'intensità del vettore velocità risultano in ogni punto caoticamente variabili nel tempo. In tale caso le forze di inerzia prevalgono su quelle di attrito.

Velocità media in una sezione S: valore ipotetico della componente della velocità parallela all'asse che, uniforme su tutta la sezione S, sarebbe in grado di dare la stessa portata in volume che si ha nella realtà.

Velocità media

$$v_M = \frac{1}{S}\int_S \vec{v}\,\vec{n}\,dS$$

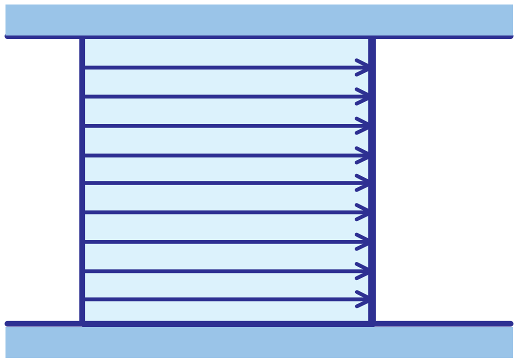
Portata in volume:

$$q_V = \int_S \vec{v}\,\vec{n}\,dS = S\,v_M$$

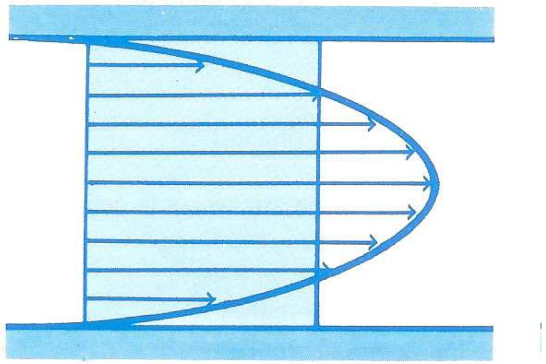
Portata in massa:

$$q_m = \int_S \rho\,\vec{v}\,\vec{n}\,dS = \rho\,q_V$$

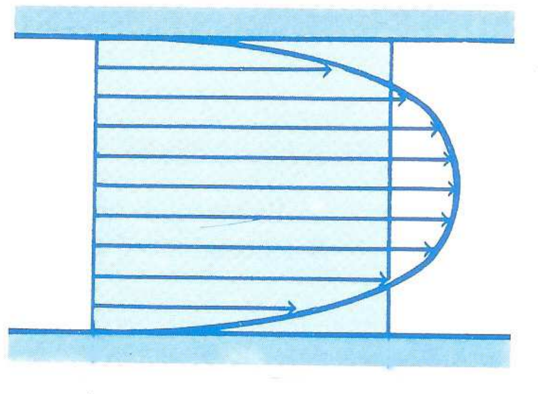
dove $\vec{n}$ è il versore normale alla sezione.



Fluido perfetto



Fluido reale (moto laminare)

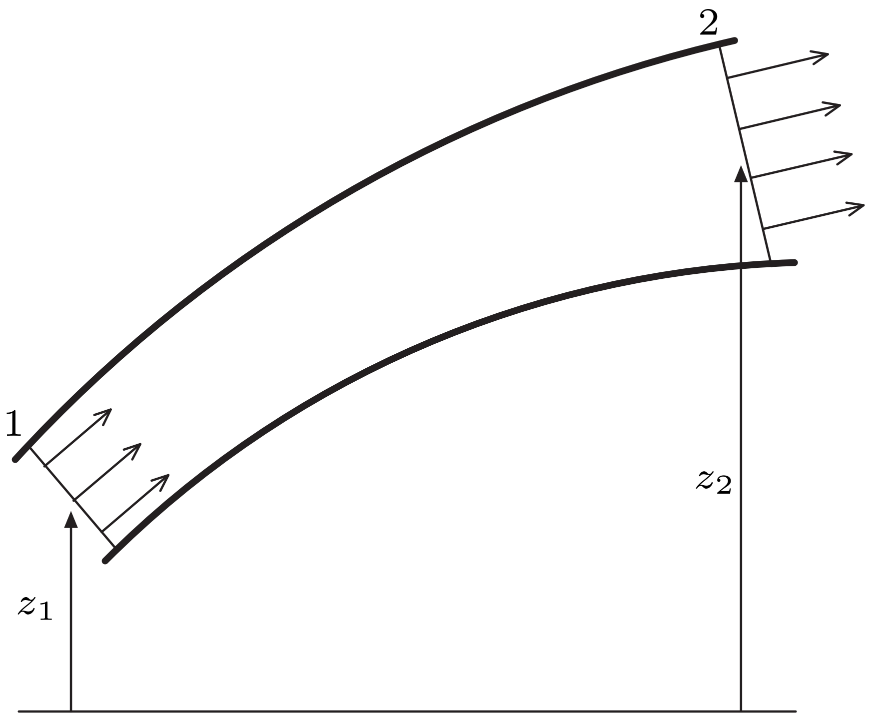


Fluido reale (moto turbolento)

Modellistica di sistemi idraulici

Riguarda il moto dei liquidi per i quali, in molti casi, si considera valida l'ipotesi di incomprimibilità: $\rho =$ costante. Supponiamo poi che la temperature del liquido si possa considerare costante: $T =$ costante $\quad \Longrightarrow \quad$ moto isotermo di fluidi incomprimibili.

Si consideri un tubo di flusso delimitato da due sezioni trasversali S_1 ed S_2:



P_1, P_2: pressioni

v_1, v_2: velocità medie

ρ_1, ρ_2: densità

z_1, z_2: quote dei baricentri delle sezioni S_2, S_2

q_{m1}, q_{m2}: portate in massa

q_1, q_2: portate in volume

Equazione di continuità. Esprime la conservazione della massa. Se all'interno del tubo non vi sono né sorgenti né pozzi di massa:

$$q_{m1} = q_{m2} \quad \Longrightarrow \quad \rho_1 \, S_1 \, v_1 = \rho_2 \, S_2 \, v_2.$$

Poiché ρ è costante:

$$S_1 \, v_1 = S_2 \, v_2 \quad \Longrightarrow \quad q_1 = q_2 = q.$$

Equazione di Bernoulli

Si consideri il moto di un fluido perfetto. Considerando il bilancio dell'energia tra le sezioni 1 e 2 relativo ad un volumetto di fluido infinitesimo dV si ha:

$$P_1 \, dV + \frac{1}{2}\rho \, dV \, v_1^2 + \rho \, dV \, g \, z_1 = P_2 \, dV + \frac{1}{2}\rho \, dV \, v_2^2 + \rho \, dV \, g \, z_2,$$

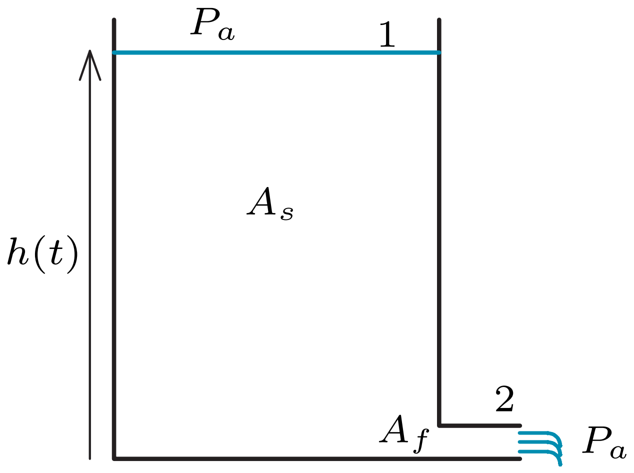
dalla quale si ricava *l'equazione di Bernoulli*

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho \, v_1^2 + \rho \, g \, z_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho \, v_2^2 + \rho \, g \, z_2,$$

ovvero

$$\boxed{\Delta P = P_1 - P_2 = \frac{\rho}{2}\,(v_2^2 - v_1^2) + \rho \, g \,(z_2 - z_1) = \frac{\rho \, q^2}{2}\left(\frac{1}{S_2^2} - \frac{1}{S_1^2}\right) + \rho \, g \,(z_2 - z_1)}$$

Esempio 1: legge di Torricelli



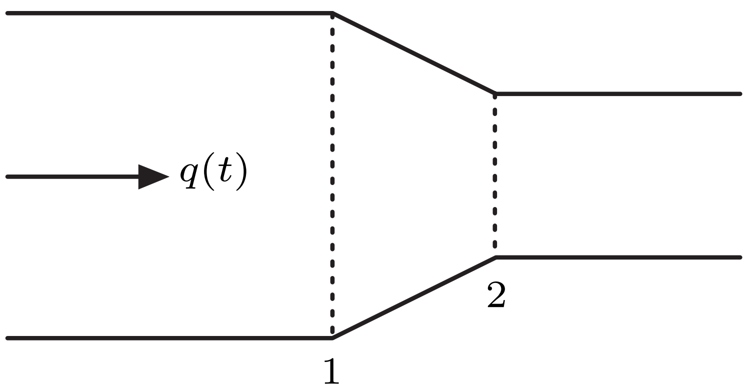
$$A_s >> A_f \quad \Rightarrow \quad v_1 \approx 0$$

$$P_a + \rho\, g\, h = P_a + \rho\, \frac{v_2^2}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$v_2 = \sqrt{2\, g\, h}$$

Esempio 2: effetto Venturi



$$q = A_1\, v_1 = A_2\, v_2, \qquad z_1 = z_2$$

$$P_1 + \rho\, \frac{v_1^2}{2} = P_2 + \rho\, \frac{v_2^2}{2}$$

$$\Downarrow$$

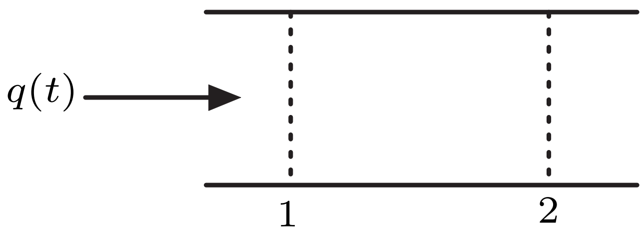
$$q = A_2 \sqrt{\frac{2\,(P_1 - P_2)}{\rho\left(1 - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2\right)}}$$

Resistenze idrauliche

Fluidi reali: nel passaggio da S_1 ad S_2 parte dell'energia si perde per attrito:

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho\, v_1^2 + \rho\, g\, z_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho\, v_2^2 + \rho\, g\, z_2 + \Delta_c,$$

dove Δ_c, detta *perdita di carico*, rappresenta l'effetto della forza frenante del fluido. Le perdite di carico si dividono in continue o uniformemente distribuite e accidentali o concentrate (gomiti, allargamenti, restringimenti). Esse danno origine alla resistenza idraulica:



$$\boxed{\Delta P = P_1 - P_2 = R\, q}$$

L'espressione è lineare solo se il moto è laminare. Per un tratto di condotto a sezione circolare di lunghezza ℓ e diametro D di ha

$$R = \frac{128\, \mu\, \ell}{\pi\, D^4} \qquad (\text{Hagen} - \text{Poiseuille})$$

Per un condotto di forma qualunque:

$$R = \frac{32\, \mu\, \ell}{A\, D_h^2},$$

dove A è l'area del condotto e D_h è il *diametro idraulico*:

$$D_h = \frac{4\,A}{\text{perimetro}}$$

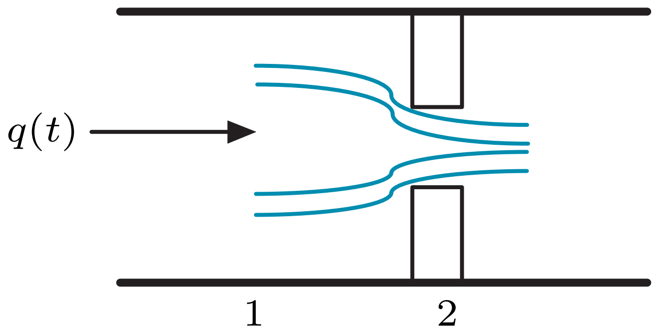
Quando il moto è turbolento la resistenza diventa non lineare. Equazioni molto utilizzate sono le seguenti

$$\Delta P = R\,q^2\,\mathrm{sgn}(q) = R\,|q|\,q, \qquad\qquad \Delta P = R\,|q|^{0.75} q.$$

L'espressione di R in tale caso è molto complessa e dipende anche da un coefficiente adimensionale detto *numero di Reynolds*, utilizzato per determinare se il moto è laminare o turbolento:

$$Re = \frac{\rho\,v\,D_h}{\mu}.$$

Valvole

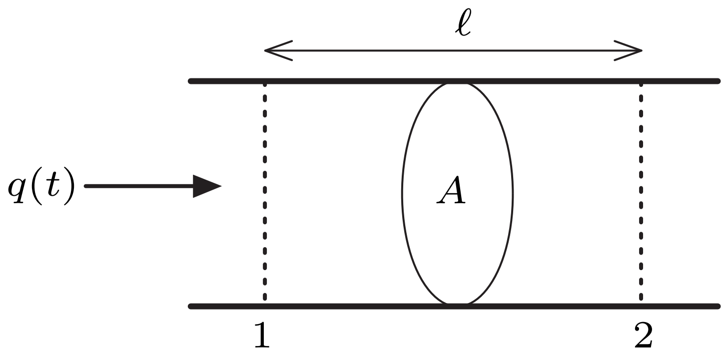


$$q = C_d\,A_2 \sqrt{\frac{2\,(P_1 - P_2)}{\rho\left(1 - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2\right)}}$$

C_d : coefficiente di scarica (dipende dalla geometria dell'orifizio)

Induttanze idrauliche

Si consideri un fluido incomprimibile in moto in un condotto a sezione costante.



Il volume di fluido delimitato dalle sezioni 1 e 2 ha massa

$$m = \rho\,\ell\,A$$

Applicando la legge di Newton:

$$m\,\dot{v} = F_1 - F_2 = (P_1 - P_2)\,A \quad \Longrightarrow \quad \rho\,\ell\,A\,\dot{v} = (P_1 - P_2)\,A.$$

Si ha dunque:

$$\boxed{\Delta P = P_1 - P_2 = L\,\dot{q}}$$

dove

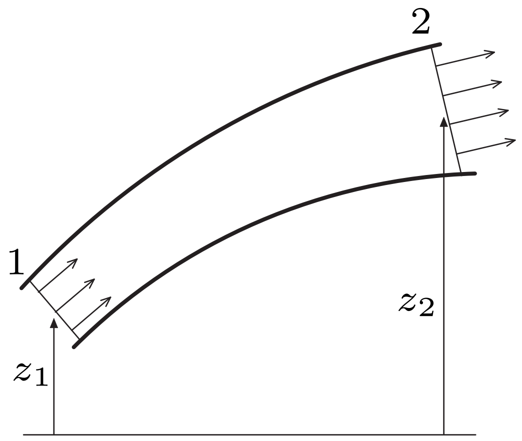
$$L = \frac{\rho\,\ell}{A}$$

è l'induttanza idraulica.

Se la sezione del condotto è variabile:

$$L = \rho \int_0^{\ell} \frac{dx}{A(x)}$$

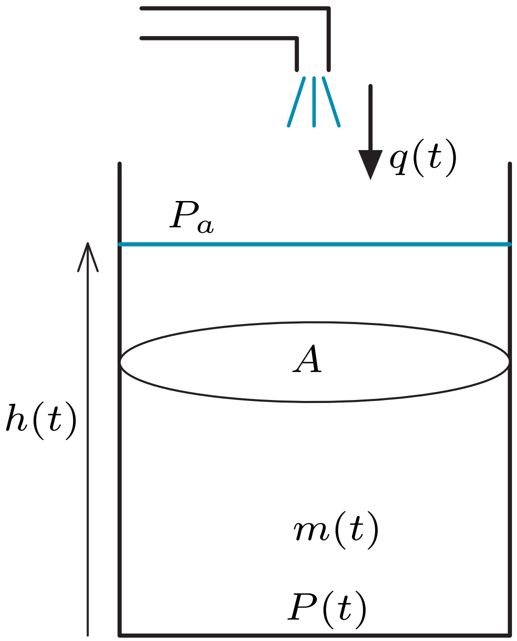
Equazione di bernoulli generalizzata (fluidi reali)



$$\Delta P = P_1 - P_2 = R\,q + L\,\dot{q} + \frac{\rho\,q^2}{2}\left(\frac{1}{A_2^2} - \frac{1}{A_1^2}\right) + \rho\,g\,(z_2 - z_1)$$

- Se il moto è turbolento il primo termine a destra diventa non lineare (es. $R\,q^2$).
- Il terzo termine <u>non è una resistenza</u> (positivo per condotti convergenti e negativo per condotti divergenti). Esso rappresenta una conversione di “energia di pressione” in energia cinetica o viceversa.
- Il terzo termine deve essere moltiplicato per un fattore correttivo α, $(1 \leq \alpha \leq 2)$, massimo per il moto laminare in condotti a sezione circolare, mimimo per il moto completamente turbolento.
- Il quarto termine equivale ad un generatore di pressione (è concorde a ΔP in discesa, si oppone a ΔP in salita).

Capacità idrauliche: serbatoi



P_a: pressione atmosferica (costante)

$$m(t) = \rho\, V(t) = \rho\, A\, h(t)$$

$$P(t) = P_a + \rho\, g\, h(t)$$

$$\dot{m} = q_m = \rho\, q = \rho\, A\, \dot{h} \quad \Rightarrow \quad \boxed{q = \dot{V} = A\, \dot{h}}$$

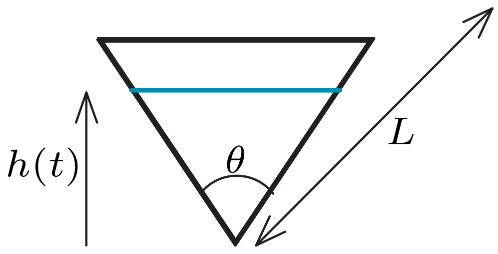
$$\Downarrow$$

$$\boxed{q = C\, \dot{P}} \qquad C = \frac{A}{\rho\, g}$$

Se la sezione del serbatoio non è costante il modello diventa non lineare:

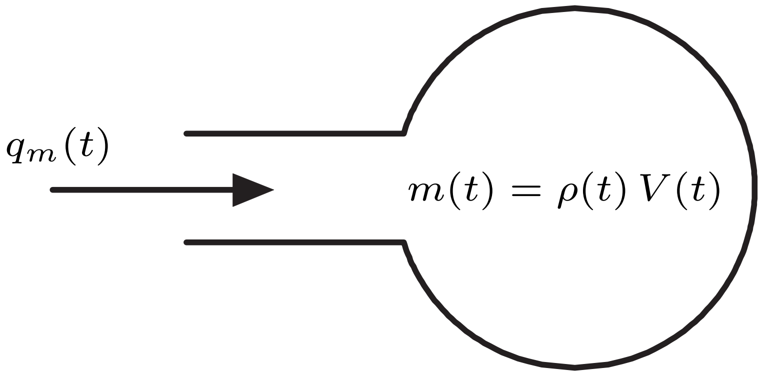
$$C = \frac{1}{\rho\, g}\, \frac{dV(h)}{dh}$$

<u>Esempio</u>.



$$C = \frac{2\, L\, \tan\frac{\theta}{2}\, h}{\rho\, g} \quad \Rightarrow \quad q = \frac{2\, L\, \tan\frac{\theta}{2}\, h}{\rho\, g}\, \dot{P}$$

Capacità idrauliche: comprimibilità



Bilancio di massa:

$$\dot{m} = q_m \quad \Longrightarrow \quad q_m = \rho\, \dot{V} + \dot{\rho}\, V$$

$$\rho = \rho(P, T) \quad \Longrightarrow \quad \dot{\rho} = \frac{\partial \rho}{\partial P}\, \dot{P} + \frac{\partial \rho}{\partial T}\, \dot{T}$$

Ipotesi:

- ρ variabile nel tempo ma non nello spazio
- moto isotermo $\Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial T} \approx 0$

Ricordando la definizione di bulk modulus (slide 2) si ottiene:

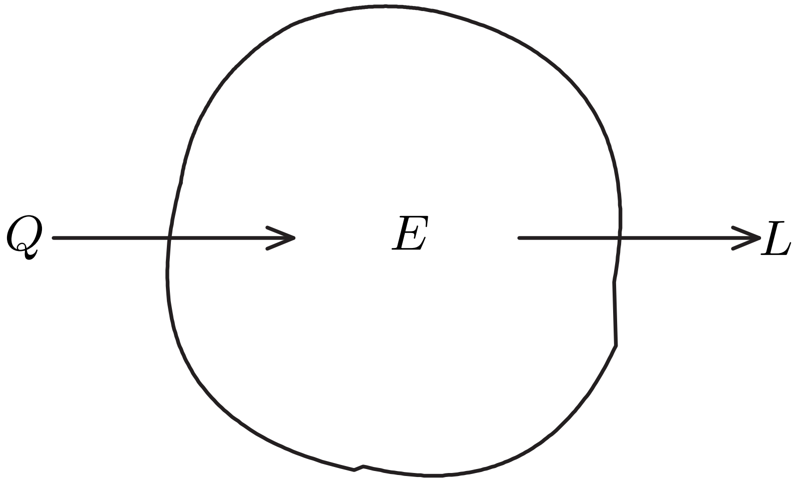
$$\rho\, q = \rho\, \dot{V} + \dot{\rho}\, V = \rho\, \dot{V} + \frac{\partial \rho}{\partial P}\, \dot{P}\, V = \rho\, \dot{V} + \frac{\rho}{\beta}\, \dot{P}\, V$$

e quindi

$$\boxed{q = \dot{V} + \frac{V}{\beta}\, \dot{P}}$$

Primo principio della termodinamica

Esprime la conservazione dell'energia: l'energia non può essere creata o distrutta ma può solo essere convertita da una forma in un'altra.



Bilancio di energia:

$$\Delta E = \Delta E_c + \Delta E_p + \Delta E_i = Q - L$$

dove:

ΔE = variazione di energia del sistema (cinetica, potenziale, interna);

Q = calore trasferito al sistema (entrante o generato nel sistema);

L = lavoro compiuto dal sistema.

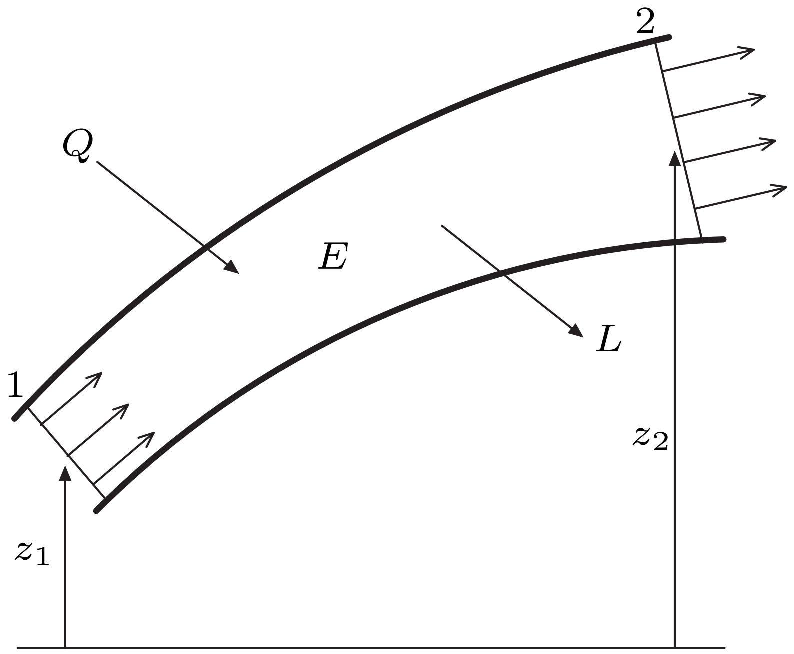
La formulazione del primo principio mette in evidenza:

1) l'esistenza dell'energia interna E_i (indicata quasi sempre con U);

2) la definizione di calore come energia che viene trasmessa.

Il trasferimento di calore avviene se è presente un gradiente di temperatura.

Bilancio energetico per un sistema aperto tra due sezioni 1 e 2:



P_1, P_2: pressioni

v_1, v_2: velocità medie

ρ_1, ρ_2: densità

z_1, z_2: quote dei baricentri delle sezioni 1 e 2

q_{m1}, q_{m2}: portate in massa

u_1, u_2: energie interne specifiche (per unità di massa);

e: energia del sistema per unità di massa;

$$\boxed{\left(\frac{1}{2}\,v_1^2 + u_1 + g\,z_1 + \frac{p_1}{\rho_1}\right) q_{m_1} + \dot{Q} = \left(\frac{1}{2}\,v_2^2 + u_2 + g\,z_2 + \frac{p_2}{\rho_2}\right) q_{m_2} + \frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho\, e\, dV + \dot{L}}$$

Spesso viene utilizzata la grandezza

$$h = u + p/\rho = u + p\,v$$

dove v è il volume specifico, detta *entalpia specifica*:

$$\boxed{\left(\frac{1}{2}\,v_1^2 + h_1 + g\,z_1\right) q_{m_1} + \dot{Q} = \left(\frac{1}{2}\,v_2^2 + h_2 + g\,z_2\right) q_{m_2} + \frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho\, e\, dV + \dot{L}} \qquad (2)$$

In regime stazionario ed assenza di lavoro esterno si ha:

$$\left(\frac{1}{2}\,v_1^2 + u_1 + g\,z_1 + \frac{p_1}{\rho_1}\right) q_m + \dot{Q} = \left(\frac{1}{2}\,v_2^2 + u_2 + g\,z_2 + \frac{p_2}{\rho_2}\right) q_m$$

ovvero

$$\frac{p_1}{\rho_1} - \frac{p_2}{\rho_2} = \frac{1}{2}\,v_2^2 - \frac{1}{2}\,v_1^2 + g\,(z_2 - z_1) + \left(u_2 - u_1 - \frac{\dot{Q}}{q_m}\right).$$

L'espressione sopra è una generalizzazione dell'equazione di Bernoulli che mette in evidenza come le perdite di carico rappresentino una trasformazione di energia meccanica in energia termica. Infatti, le forze di attrito portano ad un aumento della temperatura del fluido e quindi aumentano sia l'energia interna che il calore trasferito all'ambiente circostante. L'energia interna rappresenta l'aumento delle energie cinetica e potenziale che avviene a livello molecolare.

Modellistica di sistemi pneumatici

Riguarda il moto dei gas. In questo caso l'ipotesi di incomprimibilità non è più accettabile. Anche l'ipotesi di moto isotermo è raramente verificata e si ha trasferimento di calore.

Coordinate termodinamiche: descrivono lo stato interno di un sistema e sono indipendenti dalla sua condizione di quiete o di moto.

Equazione di stato dei gas:

$$f(P, v, T) = 0,$$

dove v è il volume specifico e T è la temperatura assoluta (in gradi Kelvin). La temperatura in gradi Celsius T_C è legata a quella in gradi Kelvin T_K dalla relazione

$$T_K = 273,15 + T_C.$$

Per i **gas perfetti** l'equazione di stato diventa:

$$P\,v = R\,T,$$

dove R è una costante specifica del gas, ovvero

$$\boxed{P = \rho\,R\,T} \qquad \boxed{P\,V = m\,R\,T}$$

Calore specifico: è la quantità di calore che occorre fornire ad un volumetto di sostanza di massa unitaria per incrementare di un grado la sua temperatura. Dipende dalla temperatura e dalla particolare trasformazione alla quale il mezzo è sottoposto. Nel caso di fluidi si parla spesso di calore specifico a volume costante e calore specifico a pressione costante (c_V e c_P).

Per i gas perfetti si ha:

$$\boxed{u = c_V\, T} \qquad \boxed{h = c_P\, T} \qquad c_P = c_V + R, \qquad \frac{c_P}{c_V} = \gamma, (\gamma > 1).$$

Energia interna ed entalpia sono dunque funzioni solo della temperatura. Alcune trasformazioni di interesse:

- Isocora: $v =$ cost.
- Isobara: $P =$ cost.
- Isotermica: $T =$ cost.
- Adiabatica: non vi sono scambi di calore $\quad \Rightarrow \quad P\, v^{\gamma} =$ cost.
- Politropica: $P\, v^{k} =$ cost. $(1 < k < \gamma)$, dove k dipende dalla trasformazione e dalla natura del fluido.

- Nella modellistica di sistemi pneumatici le variazioni di energia cinetica e potenziale vengono di solito trascurate.
- L'induttanza pneumatica viene trascurata.

Ponendo $E = m\,u$, il bilancio energetico (2) diventa dunque:

$$h_1\,q_{m_1} + \dot{Q} = h_2\,q_{m_2} + \frac{d}{dt}(m\,u) + \dot{L} \quad\Longrightarrow\quad m\,\dot{u} + \dot{m}\,u = h_1\,q_{m_1} - h_2\,q_{m_2} + \dot{Q} - \dot{L}$$

Poiché $\dot{m} = q_{m_1} - q_{m_2}$ si ha infine

$$m\,\dot{u} = h_1\,q_{m_1} - h_2\,q_{m_2} - u\,(q_{m_1} - q_{m_2}) + \dot{Q} - \dot{L}$$

Per i gas perfetti, considerando $T_2 = T$:

$$\boxed{m\,c_V\,\dot{T} = c_P\,T_1\,q_{m_1} - c_P\,T\,q_{m_2} - c_V\,T\,(q_{m_1} - q_{m_2}) + \dot{Q} - \dot{L}} \tag{3}$$

L'equazione sopra può essere espressa anche utilizzando P e V al posto di T. Infatti, considerando $P_2 = P$ e partendo dalle relazioni

$$E = \frac{c_V}{R}\,P\,V \qquad\qquad h = c_P\,\frac{P}{\rho\,R} \qquad\qquad q_m = \rho\,q$$

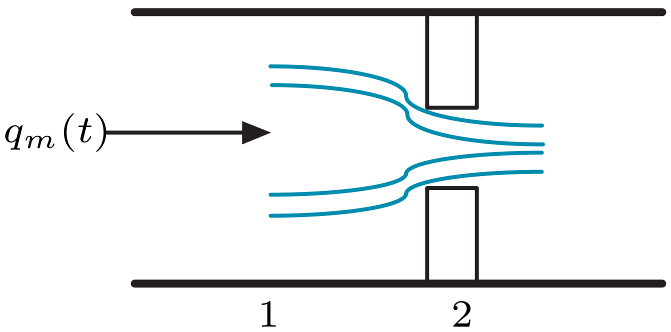
si ottiene

$$\boxed{\frac{c_V}{R}\,(P\,\dot{V} + \dot{P}\,V) = \frac{c_P}{R}\,P_1\,q_1 - \frac{c_P}{R}\,P\,q_2 + \dot{Q} - \dot{L}} \tag{4}$$

Entrambe le espressioni si utilizzano insieme al bilancio di massa.

Resistenze pneumatiche

Si possono utilizzare ancora le relazioni viste per l'idraulica per velocità non troppo elevate. Per le valvole pneumatiche, un'espressione approssimata valida per i gas perfetti in condizioni adiabatiche si può ricavare a partire da quella delle valvole idrauliche:



Ipotesi: $A_1 >> A_2$, T uniforme

$$q_m = \rho\, q = \rho\, C_d\, A_2 \sqrt{\frac{2\,(P_1 - P_2)}{\rho}}$$

dalla quale si ricava

$$\boxed{q_m = C_d\, A_2 \sqrt{\frac{2}{R\,T}\,P_2\,(P_1 - P_2)}}$$

- L'espressione ricavata è valida se la velocità del gas v si mantiene inferiore alla velocità del suono v_s nel gas stesso (moto subsonico). Se ΔP aumenta si possono raggiungere le condizioni di moto sonico $(v = v_s)$. In tal caso $q_m = k\, A_2\, P_1/\sqrt{T}$. Se ΔP aumenta ancora, q_m rimane indipendente dalla pressione di vena contratta.
- Il moto sonico si raggiunge quando $P_2 = P_{cr}$ dove la *pressione critica* P_{cr} dipende da P_1 e dal gas considerato. Le condizioni di moto si esprimono in funzione del *numero di Mach* $M = v/v_s$. Si ha poi $v_s = \sqrt{\partial p/\partial \rho} = \sqrt{\beta/\rho}$.

Capacità pneumatiche

Se $\dot{T} \approx 0$ e $\dot{V} = 0$ (contenitori rigidi):

$$q_m = \dot{\rho}\, V = \frac{\partial \rho}{\partial P}\, \dot{P}\, V = \frac{V}{R\,T}\, \dot{P}$$

Più in generale, si utilizza il bilancio energetico nella forma (3) o in quella (4), insieme al bilancio di massa. Infatti, in generale, i sistemi pneumatici sono in realtà sistema pneumatico–termici.