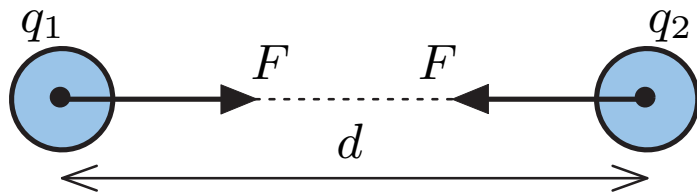


# Modellistica di sistemi elettrici e magnetici

## Interazione tra cariche elettriche

### Legge di Coulomb

$$F = \frac{q_1 q_2}{4 \pi \epsilon d^2}, \quad \epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$$



$\epsilon$  : *permittività* del mezzo

$\epsilon_0$  : *permittività* del vuoto

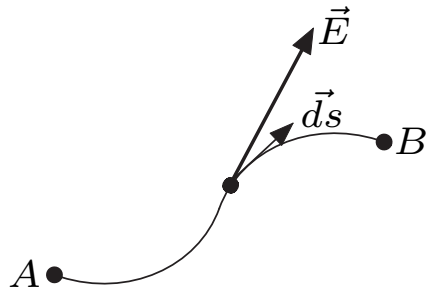
$\epsilon_r$  : *costante dielettrica* (numero puro)

**Campo elettrico:** forza che agisce sull'unità di carica

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$$

Una particella carica posta in un campo elettrico possiede energia potenziale in quanto il campo esercita una forza su di essa ed occorre effettuare lavoro per spostarla da una posizione ad un'altra. Il *potenziale elettrico* in un punto è l'energia potenziale posseduta da una carica unitaria posta in quel punto.

**Differenza di potenziale elettrico:** lavoro necessario per spostare una carica unitaria



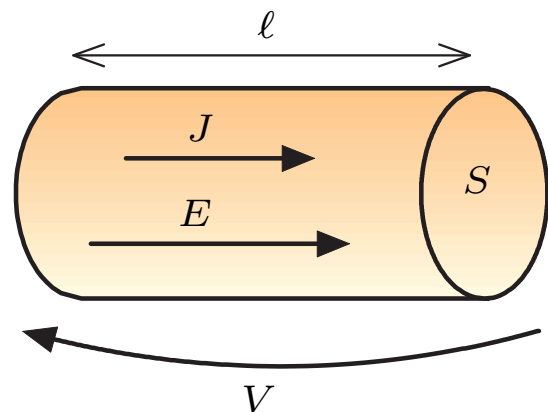
$$\Delta V = V_A - V_B = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad \Longrightarrow \quad \vec{E} = -\text{grad } V$$

In una rete elettrica, il potenziale di un nodo è valutato rispetto ad un nodo scelto come riferimento (es. massa), al quale viene di solito attribuito valore nullo del potenziale.

Effetti del campo elettrico sulla materia:

- conduttori
- semiconduttori
- isolanti
- dielettrici

## Resistenze elettriche



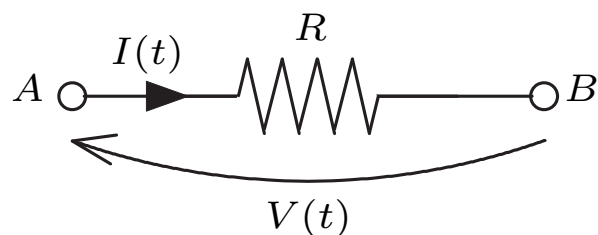
Legge di Ohm (conduttori ohmici):

$$\vec{J}(t) = \gamma \vec{E}(t) = \frac{\vec{E}(t)}{\rho}$$

$J$  : densità di corrente

$\gamma$  : conducibilità elettrica del conduttore

$\rho$  : resistività elettrica del conduttore



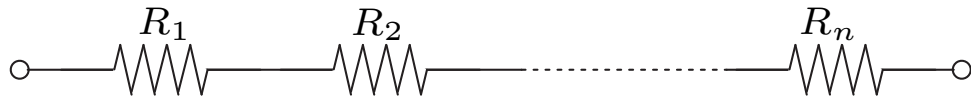
Corrente:  $I = \frac{dQ}{dt} = J S$     Resistenza:  $R = \frac{\rho \ell}{S}$

$$V(t) = V_A - V_B = R I(t)$$

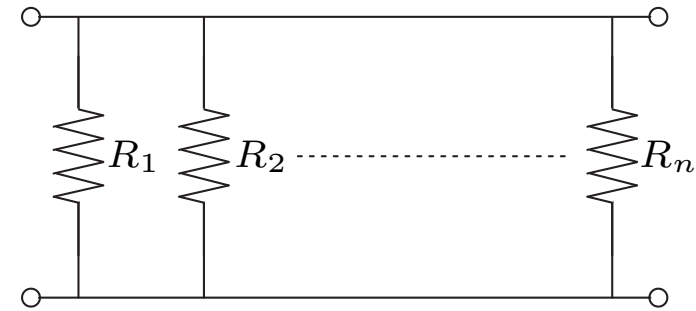
Potenza dissipata (sotto forma di calore):

$$P(t) = \Delta V(t) I(t)$$

Se il conduttore segue la legge di Ohm:  $P = R I^2 = \Delta V^2 / R$ .

Resistenze in serie e in parallelo

$$R_{eq} = \sum_{i=1}^n R_i$$



$$\frac{1}{R_{eq}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i}$$

- Influenza della temperatura  $T$  sulla resistenza:

$$R(T) = R_0 (1 + \alpha \Delta T), \quad \Delta T = T - T_0, \quad R_0 = R(T_0)$$

dove  $T_0$  è la temperatura di riferimento (di solito  $20^\circ C$ ).

- Esistono materiali conduttori che non seguono la legge di Ohm:

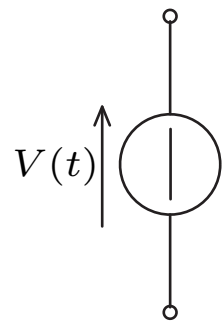
$$\Delta V = f(I)$$

Esempi: conduttori non ohmici (come i filamenti delle lampade ad incandescenza), i superconduttori (non seguono la legge di Ohm alle basse temperature), i semiconduttori (il comportamento dipende dal verso del campo elettrico).

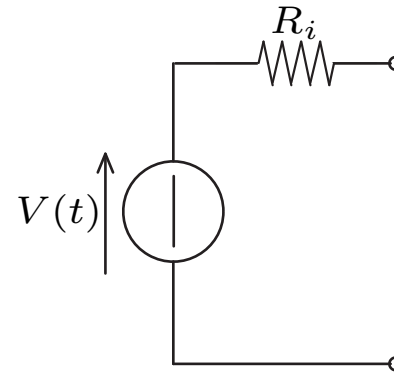
## Generatori di tensione e corrente

Un **generatore elettrico** è un dispositivo in grado di generare una *forza elettromotrice* ovvero di spostare le cariche libere presenti nei conduttori che costituiscono il circuito del generatore stesso. In genere, l'energia elettrica viene ottenuta trasformando energia di altro tipo (meccanico, chimico, termico, etc.). Esempi: dinamo, pile, accumulatori, termocoppie, pannelli fotovoltaici.

### Generatori di tensione

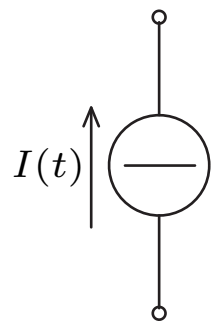


ideale

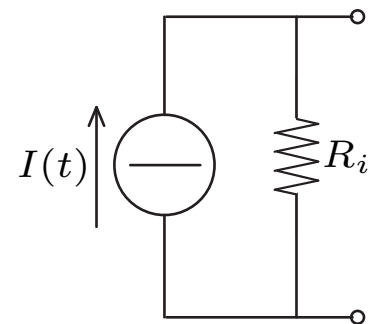


reale

### Generatori di corrente



ideale

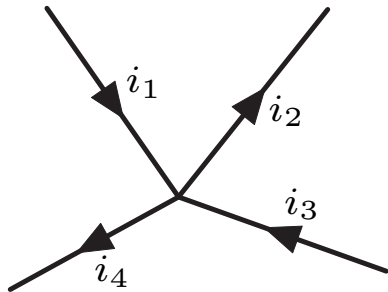


reale

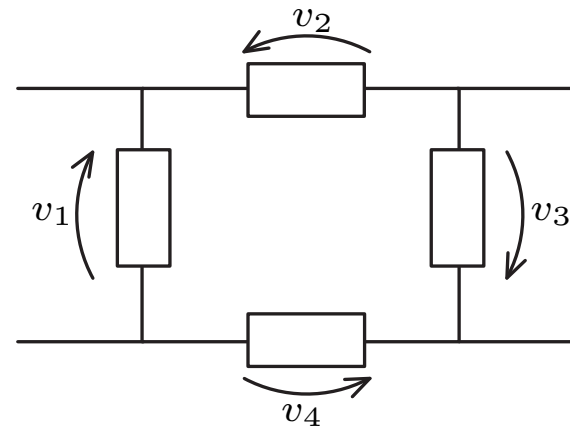
## Principi di Kirchhoff

I° principio di Kirchhoff: in ciascun nodo di una rete elettrica è nulla la somma algebrica delle correnti che confluiscono al nodo stesso (conservazione della carica).

II° principio di Kirchhoff: in ciascuna maglia (percorso chiuso) di una rete elettrica è nulla la somma algebrica delle cadute di tensione lungo la maglia stessa (conservazione dell'energia).

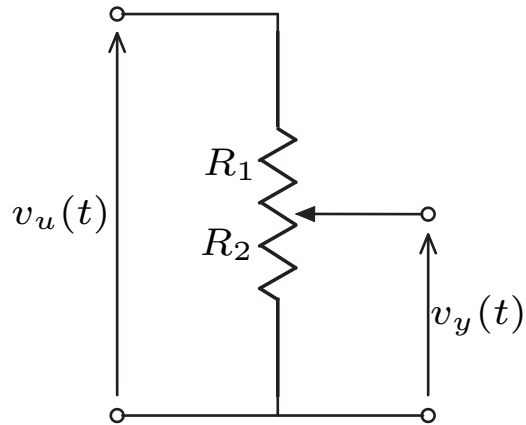


$$i_1 - i_2 + i_3 - i_4 = 0$$

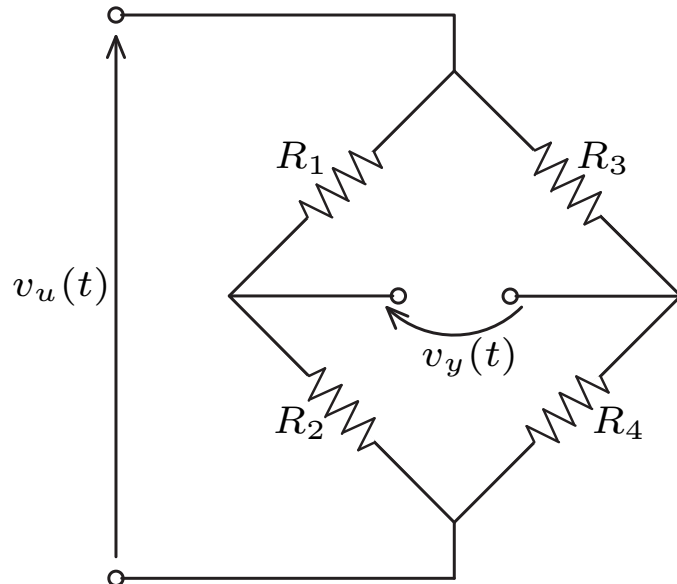


$$v_1 - v_2 + v_3 - v_4 = 0$$

**Teorema:** si consideri una rete elettrica generica, nella quale sono presenti  $n$  nodi ed  $r$  rami. Per determinare le  $r$  correnti di ramo è necessario utilizzare un numero di equazioni di maglia pari a  $m = r - n + 1$ . Le rimanenti  $r - m$  saranno equazioni di nodo.

Esempio 1: partitore

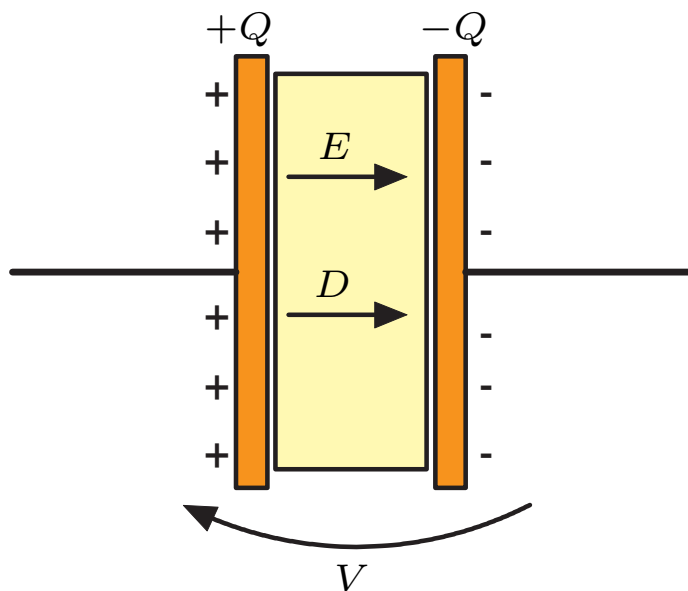
$$v_y(t) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} v_u(t)$$

Esempio 2: ponte di Wheatstone

$$v_y(t) = \left( \frac{R_3}{R_3 + R_4} - \frac{R_1}{R_1 + R_2} \right) v_u(t)$$

## Capacità elettriche: condensatori

Un *condensatore* è costituito da due corpi conduttori con interposto un materiale dielettrico. In esso può essere accumulata carica elettrica. Il lavoro fatto per caricare il condensatore viene immagazzinato sotto forma di energia elettrica.

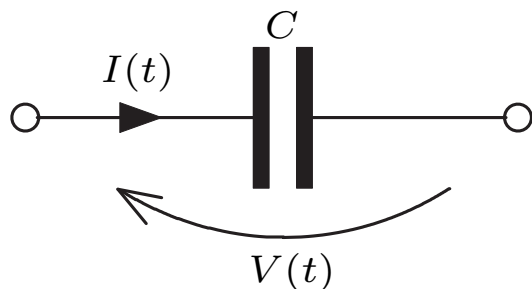


Mezzi lineari:

$$\vec{D}(t) = \epsilon \vec{E}(t) \implies Q(t) = C V(t)$$

$D$  : induzione elettrica

$C$  : capacità elettrica



$$I(t) = C \frac{dV(t)}{dt}$$

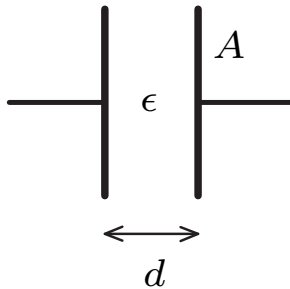


Energia immagazzinata dal campo elettrico:

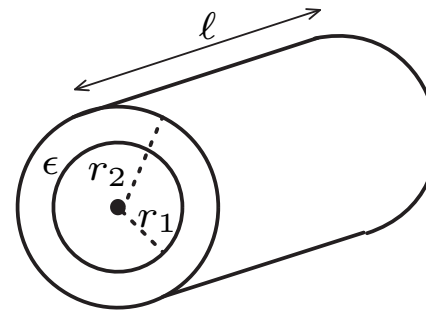
$$E_e = \int V dQ = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2} C V^2$$

- La capacità elettrica dipende dalla geometria delle armature e dalla natura del mezzo dielettrico.

Esempi:



$$C = \frac{\epsilon A}{d}$$

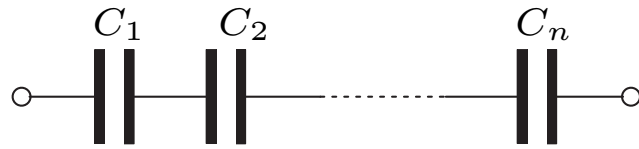


$$C = \frac{2 \pi l \epsilon}{\log \frac{r_2}{r_1}}$$

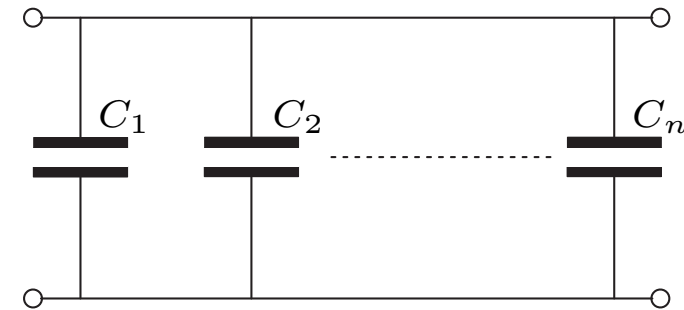
- Mezzi dielettrici non lineari:

$$D = f(E) \quad \Longrightarrow \quad Q = f(V)$$

Esempi: materiali ferroelettrici, elettreti.

Condensatori in serie e in parallelo

$$\frac{1}{C_{eq}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}$$

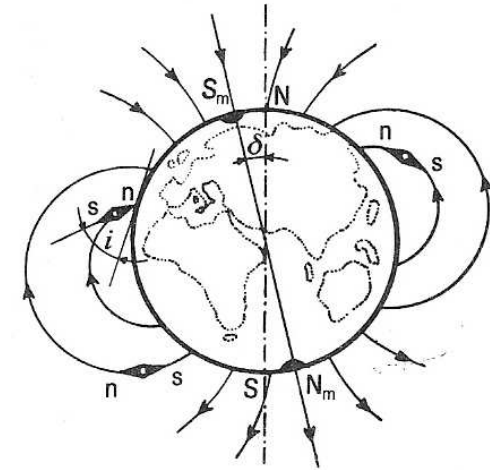
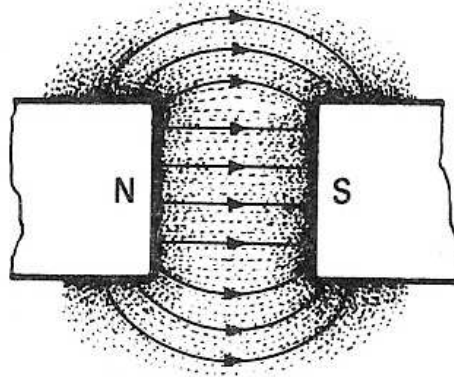
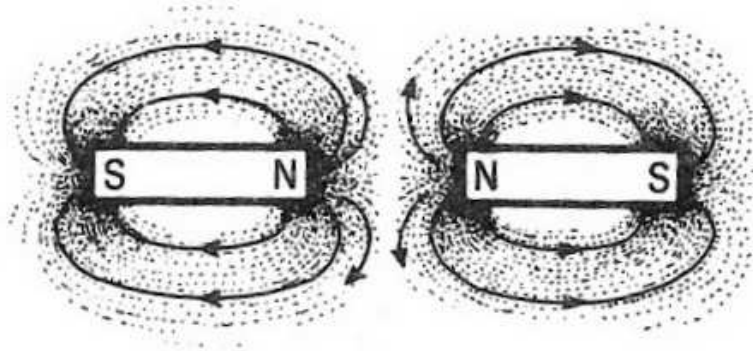


$$C_{eq} = \sum_{i=1}^n C_i$$

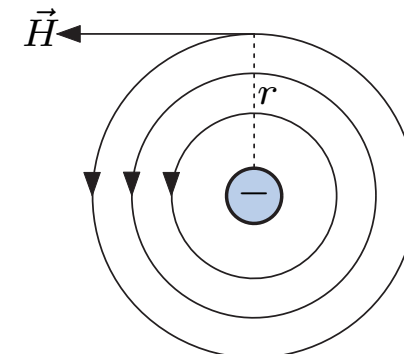
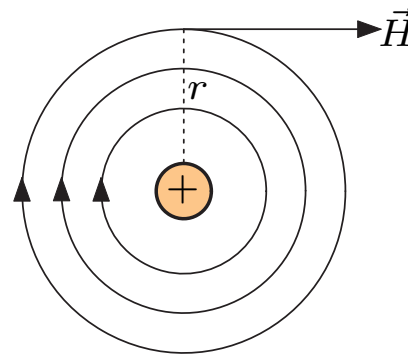
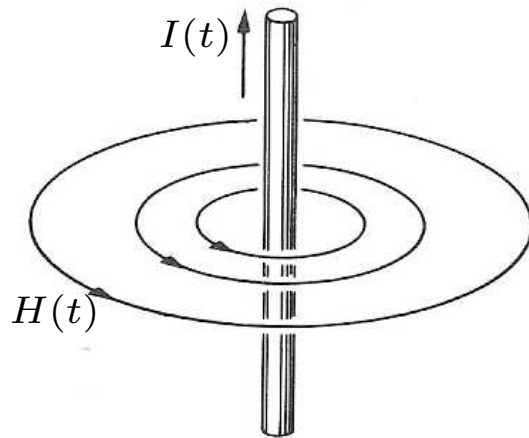
**Interazioni magnetiche**

Un *campo magnetico* può essere generato da un magnete permanente (calamita) oppure da correnti elettriche. Anche la terra genera un campo magnetico (*campo magnetico terrestre*). In realtà le interazioni elettriche e magnetiche sono solo due diversi aspetti di una proprietà della materia, la sua carica elettrica: *il magnetismo è una manifestazione di cariche elettriche in moto*. Sistemi elettrici e magnetici  $\implies$  sistemi elettromagnetici.





Campo magnetico generato da una corrente rettilinea



Formula di Biot-Savart:

$$\vec{H}(t) = \frac{I(t)}{2\pi r} \vec{s},$$

dove  $\vec{s}$  è il versore tangente alle linee di campo.

## Effetti del campo magnetico sulla materia

- Per i mezzi lineari (diamagnetici, paramagnetici ordinari) vale la relazione

$$B(t) = \mu_0 \mu_r H(t) = \mu H(t)$$

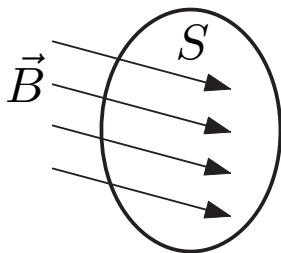
dove  $B$  è l'*induzione magnetica*,  $\mu$  è la *permeabilità magnetica* del mezzo,  $\mu_0$  la permeabilità del vuoto e  $\mu_r$  la permeabilità relativa (numero puro).

- Per i mezzi non lineari:

$$B(t) = f(H(t))$$

Esempio: materiali *ferromagnetici*, caratterizzati dal ciclo di isteresi, utilizzati per realizzare magneti permanenti.

**Flusso magnetico:** è il flusso del vettore induzione magnetica  $\vec{B}$ .



$$\Phi(t) = B(t) S \cos \alpha$$

$\alpha$  : angolo tra il vettore  $\vec{B}$  e la normale alla superficie  $S$ .

## Circuiti magnetici: Legge di Hopkinson

### Teorema della circuitazione di Ampère

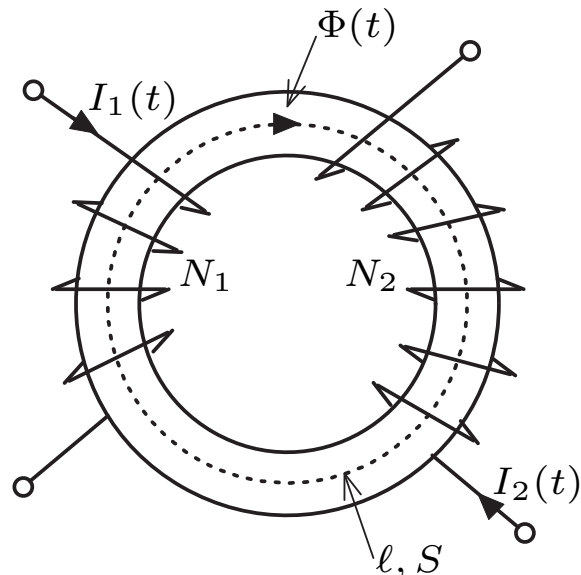
$$\oint_{\ell} H \, d\ell = I_c,$$

dove  $I_c$  è la corrente concatenata con il circuito magnetico di lunghezza  $\ell$ , detta anche *forza magnetomotrice*. Per i mezzi lineari ( $B = \mu H$ ) vale la **Legge di Hopkinson**:

$$\oint_{\ell} H \, d\ell = \mathcal{R} \Phi \quad \Longrightarrow \quad \boxed{I_c = \mathcal{R} \Phi},$$

dove  $\mathcal{R}$  è la *riluttanza* del circuito magnetico.

### Esempio.



$$N_1 I_1(t) - N_2 I_2(t) = \mathcal{R} \Phi(t), \quad \mathcal{R} = \frac{\ell}{\mu S}$$

$N_1, N_2$  : numeri di spire

$\ell$  : lunghezza circuito

$S$  : sezione circuito

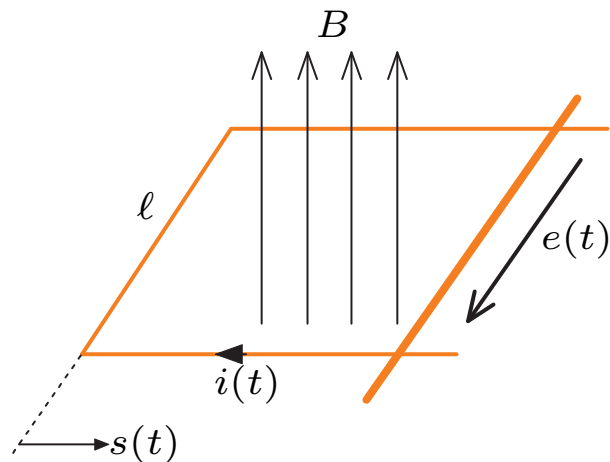
## Legge dell'induzione elettromagnetica

Tutte le volte che varia nel tempo il flusso magnetico  $\Phi_c$  concatenato con un circuito elettrico, nel circuito stesso si induce una f.e.m. data da

$$e(t) = -\frac{d\Phi_c}{dt}$$

Il verso di tale f.e.m. è sempre tale da opporsi alla causa che l'ha generata.

Esempio 1. Si consideri un conduttore rettilineo di lunghezza  $\ell$  che si muove all'interno di un campo magnetico di induzione  $B$  costante ortogonale al conduttore stesso.



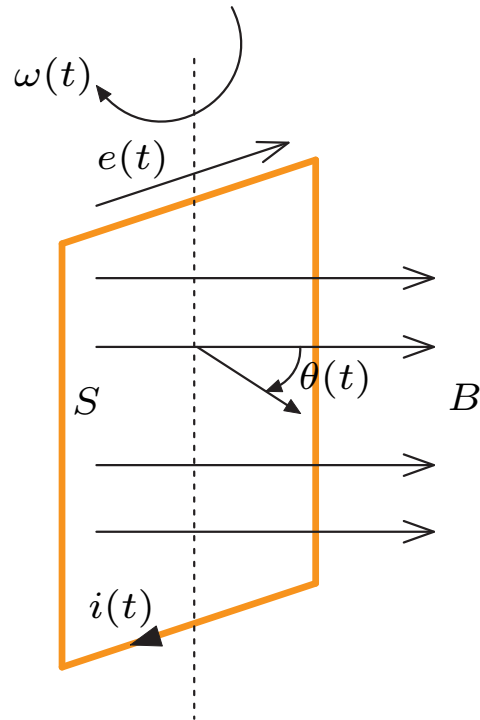
$$\Phi_c(t) = B S = B \ell s(t)$$



$$e(t) = B \ell \dot{s}(t) = B \ell v(t)$$

L'espressione  $e = B \ell v$  è detta anche *legge dei generatori*.

Esempio 2. Si consideri una spira di sezione  $S$  che ruota all'interno di un campo magnetico di induzione  $B$  costante.



$$\Phi_c(t) = B S \cos \theta$$



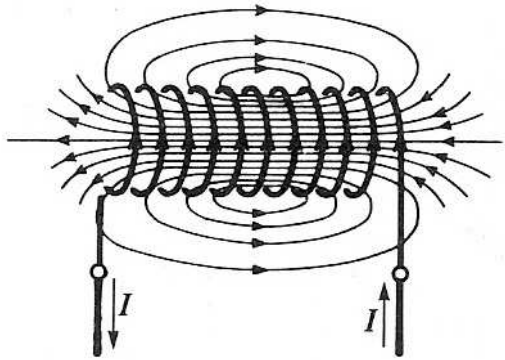
$$e(t) = -B \ell \sin \theta \dot{\theta}(t) = -B \ell \sin \theta \omega(t)$$

◇

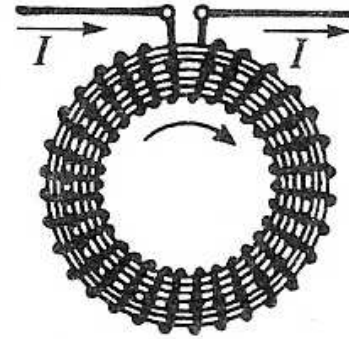
La corrente elettrica genera sempre un campo magnetico  $\implies$  ogni circuito elettrico è autoconcatenato con il proprio flusso magnetico. Se due o più circuiti elettrici sono mutuamente accoppiati il flusso magnetico generato da ogni circuito si concatena anche con gli altri  $\implies$  fenomeni di *auto e mutua induzione*.

## Inerzie elettriche: induttanze

L'*induttanza* può rappresentare fenomeni di auto e mutua induzione naturalmente presenti nei circuiti elettrici oppure dispositivi volutamente realizzati per generare un campo magnetico di una certa entità quali induttori od elettromagneti.

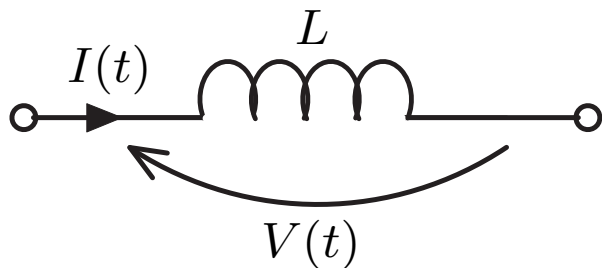


Solenoido



Solenoido toroidale

$$\text{Mezzi lineari: } B(t) = \mu H(t) \quad \Longrightarrow \quad \Phi_c(t) = L I(t)$$



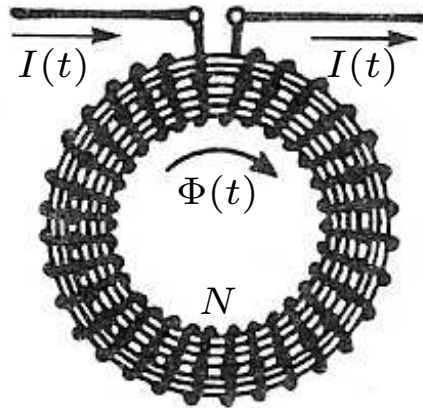
$$V(t) = L \frac{dI(t)}{dt}$$



Energia immagazzinata dal campo magnetico:

$$E_m = \int V I dt = \int I d\Phi_c = \frac{1}{2} L I^2$$

Esempio: solenoide toroidale



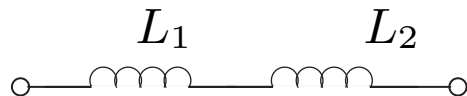
$$N I(t) = \mathcal{R} \Phi(t), \quad \mathcal{R} = \frac{\ell}{\mu S}$$

$\ell = 2 \pi r$ , dove  $r$  è il raggio medio dell'anello

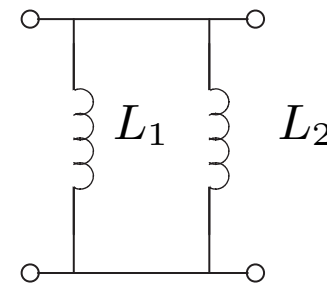
$$\Phi_c(t) = N \Phi(t) = \frac{\mu N^2 S}{\ell} I(t) \implies L = \frac{\mu N^2 S}{\ell}$$

Induttanze in serie e in parallelo.

Valgono le stesse regole delle resistenze:

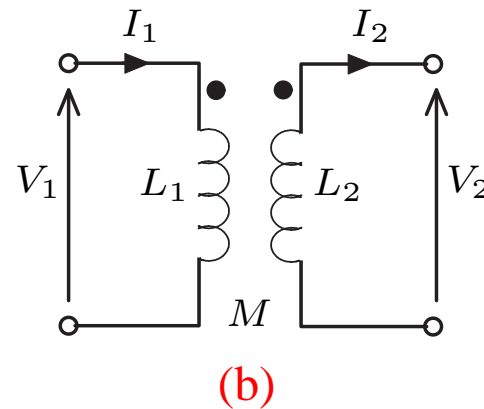
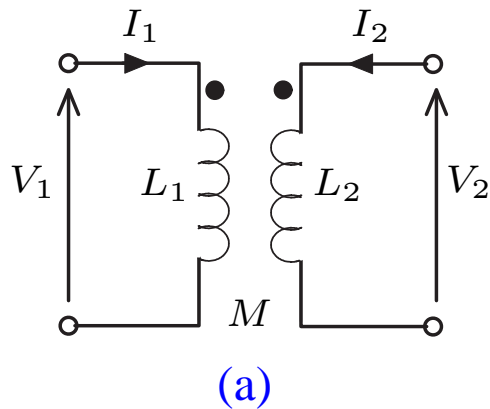


$$L_{eq} = L_1 + L_2$$



$$L_{eq} = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2}$$

## Mutua induzione



$$(a) \begin{cases} \Phi_{c1} = L_1 I_1 + M I_2 \\ \Phi_{c2} = L_2 I_2 + M I_1 \end{cases}$$

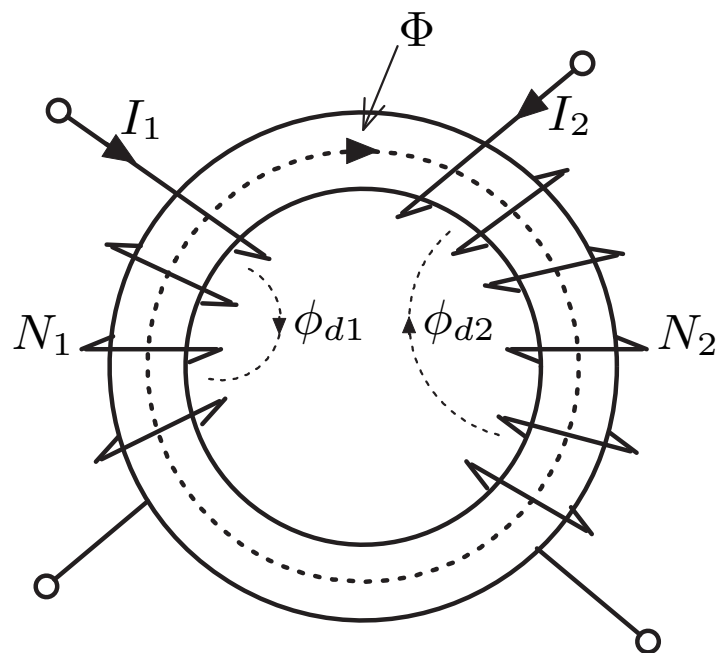
$$(b) \begin{cases} \Phi_{c1} = L_1 I_1 - M I_2 \\ \Phi_{c2} = L_2 I_2 - M I_1 \end{cases}$$

Si ha dunque:

$$(a) \begin{cases} V_1 = L_1 \dot{I}_1 + M \dot{I}_2 \\ V_2 = L_2 \dot{I}_2 + M \dot{I}_1 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} V_1 = L_1 \dot{I}_1 - M \dot{I}_2 \\ V_2 = -L_2 \dot{I}_2 + M \dot{I}_1 \end{cases}$$

Energia immagazzinata dal campo magnetico:

$$E_m = \int (I_1 d\Phi_{c1} + I_2 d\Phi_{c2}) = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + M I_1 I_2$$

Esempio.

$$N_1 I_1 + N_2 I_2 = \mathcal{R} \Phi$$

$$\phi_{d1} = k_1 I_1, \quad \phi_{d2} = k_2 I_2$$

$\phi_{d1}, \phi_{d2}$ : flussi dispersi (circuiti richiusi in aria)

$$\Phi_{c1} = N_1 \Phi + \phi_{d1}, \quad \Phi_{c2} = N_2 \Phi + \phi_{d2}$$

$$L_1 = \frac{N_1^2}{\mathcal{R}} + k_1, \quad L_2 = \frac{N_2^2}{\mathcal{R}} + k_2, \quad M = \frac{N_1 N_2}{\mathcal{R}}$$

◇

In generale, si ha:

$$M < \sqrt{L_1 L_2}$$

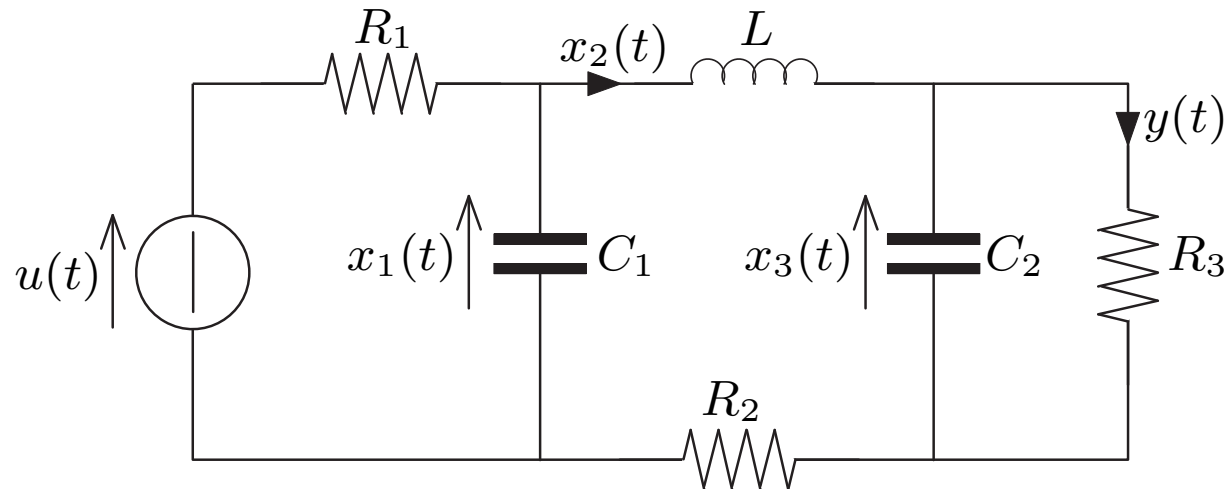
Se i flussi dispersi sono nulli (tutto il flusso generato dalla corrente si concatena con l'anello):

$$M = \sqrt{L_1 L_2}$$

In tale caso (ideale) si parla di *accoppiamento perfetto*.

## Modelli nello spazio degli stati di reti elettriche

### Esempio 1.



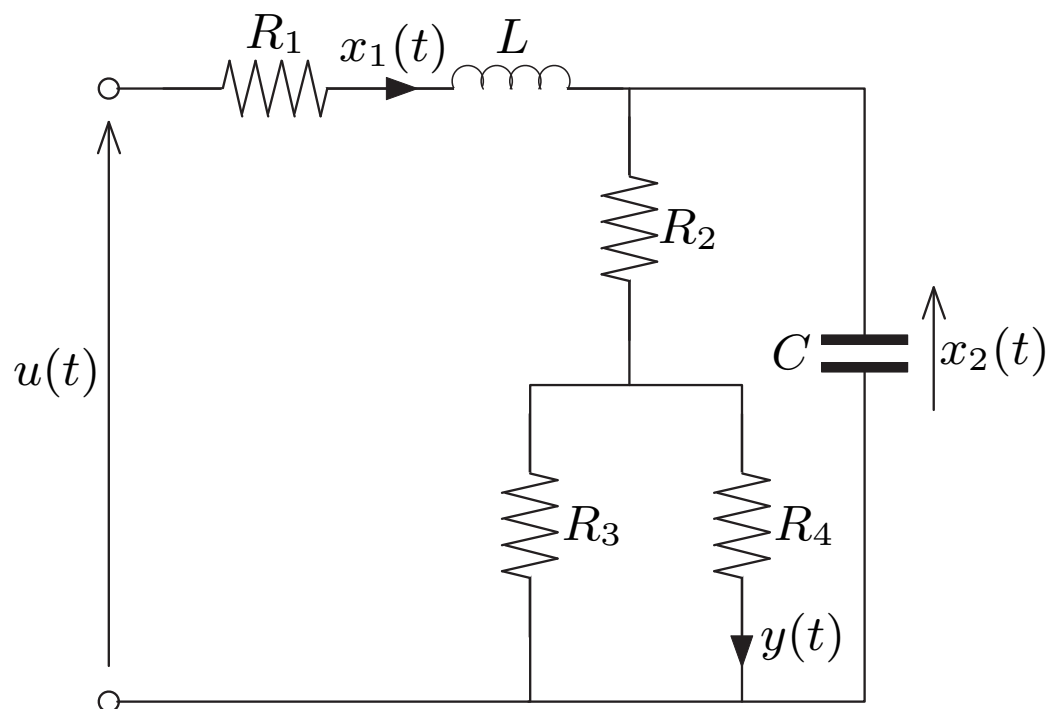
$$\begin{cases} C_1 \dot{x}_1 = \frac{u - x_1}{R_1} - x_2 \\ x_1 - L \dot{x}_2 - x_3 - R_2 x_2 = 0 \\ C_2 \dot{x}_3 = x_2 - \frac{x_3}{R_3} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{x_1}{R_1 C_1} - \frac{x_2}{C_1} + \frac{u}{R_1 C_1} \\ \dot{x}_2 = \frac{x_1}{L} - \frac{R_2}{L} x_2 - \frac{x_3}{L} \\ \dot{x}_3 = \frac{x_2}{C_2} - \frac{x_3}{R_3 C_2} \end{cases}$$

$$y = \frac{x_3}{R_3}$$

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1 C_1} & -\frac{1}{C_1} & 0 \\ \frac{1}{L} & -\frac{R_2}{L} & -\frac{1}{L} \\ 0 & \frac{1}{C_2} & -\frac{1}{R_3 C_2} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1 C_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{R_3} \end{bmatrix}$$

### Esempio 2.



$$\begin{cases} L \dot{x}_1 = u - R_1 x_1 - x_2 \\ C \dot{x}_2 = x_1 - \frac{x_2}{R_{eq}} \end{cases}$$

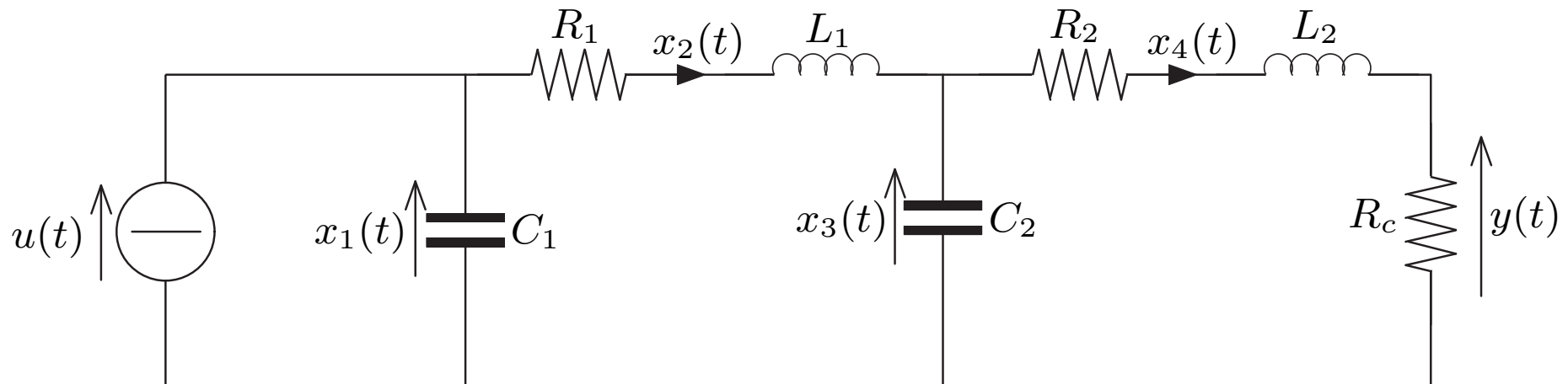
$$y = \frac{x_2 - \frac{R_2}{R_{eq}} x_2}{R_4}$$

dove

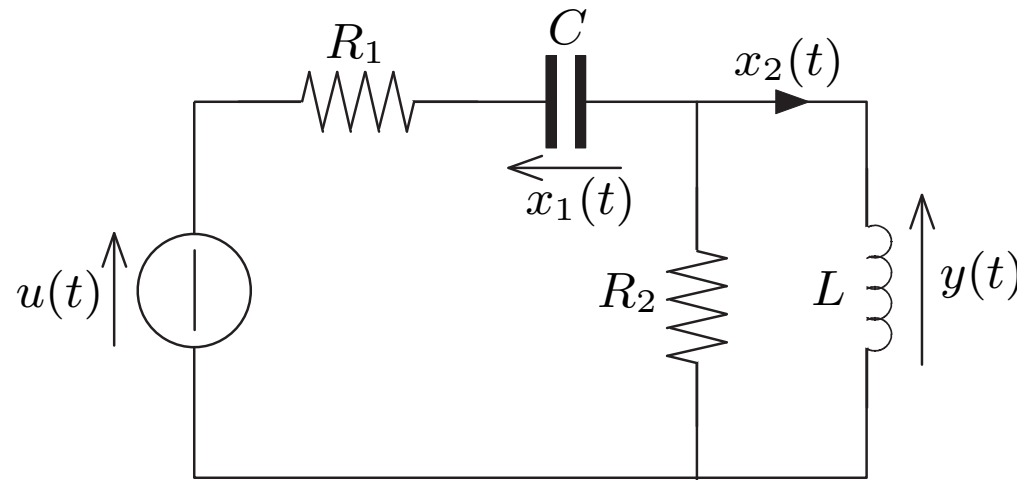
$$R_{eq} = R_2 + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4}$$

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{R_1}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{R_{eq} C} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & \frac{R_{eq} - R_2}{R_{eq} R_4} \end{bmatrix}$$

### Esempio 3.



$$\begin{cases} C_1 \dot{x}_1 = u - x_2 \\ L_1 \dot{x}_2 = x_1 - R_1 x_2 - x_3 \\ C_2 \dot{x}_3 = x_2 - x_4 \\ L_2 \dot{x}_4 = x_3 - R_2 x_4 - R_c x_4 \end{cases} \quad y = R_c x_4$$

Esempio 4.

$$\begin{cases} C \dot{x}_1 = \frac{L \dot{x}_2}{R_2} + x_2 \\ u - R_1 C \dot{x}_1 - x_1 - L \dot{x}_2 = 0 \end{cases}$$

$$y = L \dot{x}_2$$

Le equazioni di stato non si ricavano direttamente già disaccoppiate  $\implies$  loop algebrico.

Risolvendo il loop si ottiene:

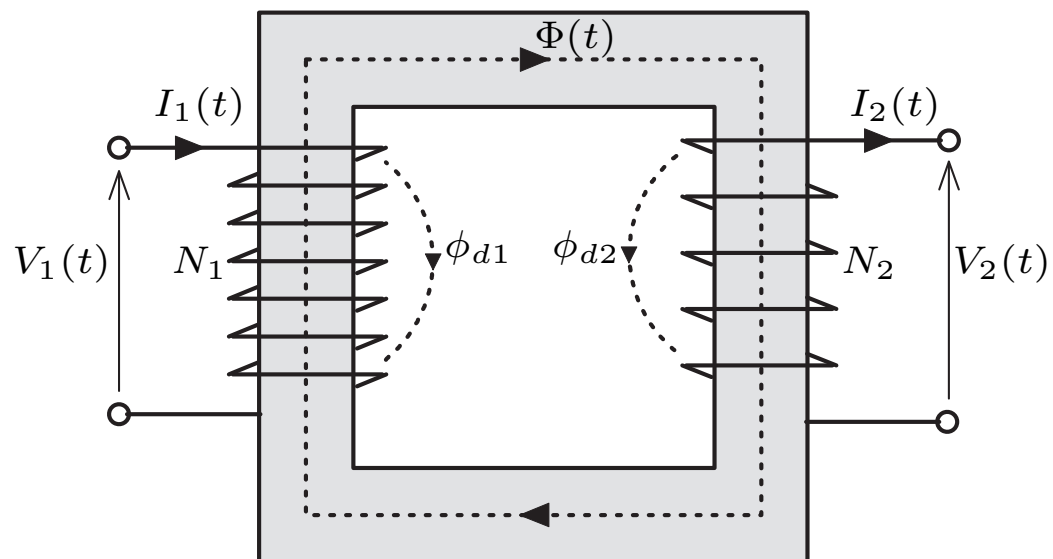
$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{(R_1 + R_2)C} & \frac{R_2}{(R_1 + R_2)C} \\ -\frac{R_2}{(R_1 + R_2)L} & -\frac{R_1 R_2}{(R_1 + R_2)L} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{1}{(R_1 + R_2)C} \\ \frac{R_2}{(R_1 + R_2)L} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} -\frac{R_2}{R_1 + R_2} & -\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \end{bmatrix}$$

$$D = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

## Trasformatore elettrico



$$N_1 I_1 - N_2 I_2 = \mathcal{R} \Phi$$

$$\phi_{d1} = k_1 I_1, \quad \phi_{d2} = k_2 I_2$$

$$\Phi_{c1} = N_1 \Phi + \phi_{d1}$$

$$\Phi_{c2} = -N_2 \Phi + \phi_{d2}$$

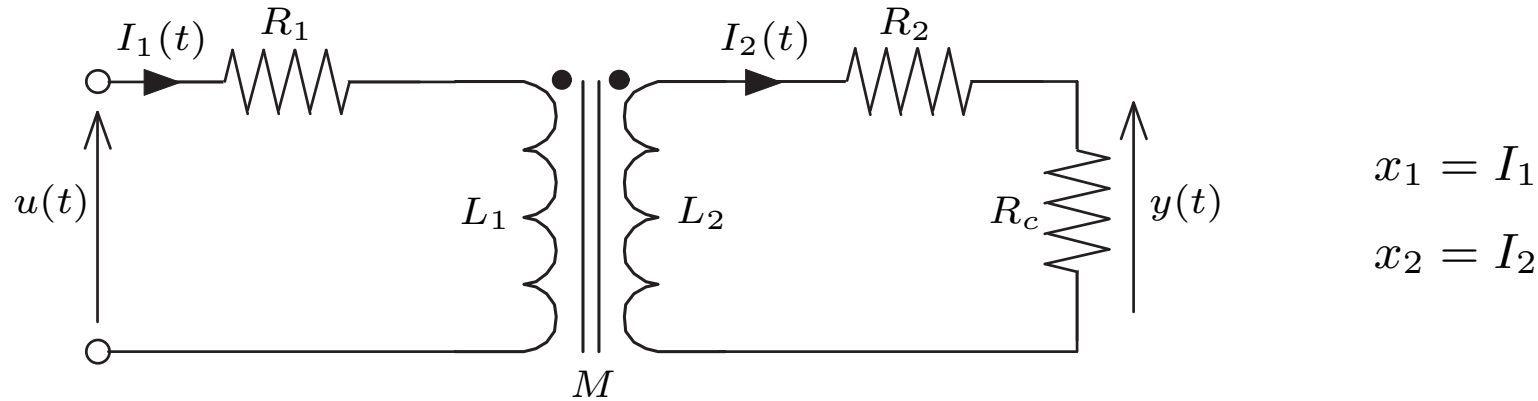
$$V_1 = \dot{\Phi}_{c1} = k_1 \dot{I}_1 + N_1 \dot{\Phi} = \left(k_1 + \frac{N_1^2}{\mathcal{R}}\right) \dot{I}_1 - \frac{N_1 N_2}{\mathcal{R}} \dot{I}_2$$

$$V_2 = -\dot{\Phi}_{c2} = -k_2 \dot{I}_2 + N_2 \dot{\Phi} = -\left(k_2 + \frac{N_2^2}{\mathcal{R}}\right) \dot{I}_2 + \frac{N_1 N_2}{\mathcal{R}} \dot{I}_1$$

### Casi ideali:

$$\phi_{d1}, \phi_{d2} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{V_1}{V_2} = \frac{N_1}{N_2} \quad \mathcal{R} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{I_1}{I_2} = \frac{N_2}{N_1}$$



Esempio 5.

$$\begin{cases} u = R_1 x_1 + L_1 \dot{x}_1 - M \dot{x}_2 \\ L_2 \dot{x}_2 + (R_2 + R_c) x_2 - M \dot{x}_1 = 0 \end{cases} \quad y = R_c x_2$$

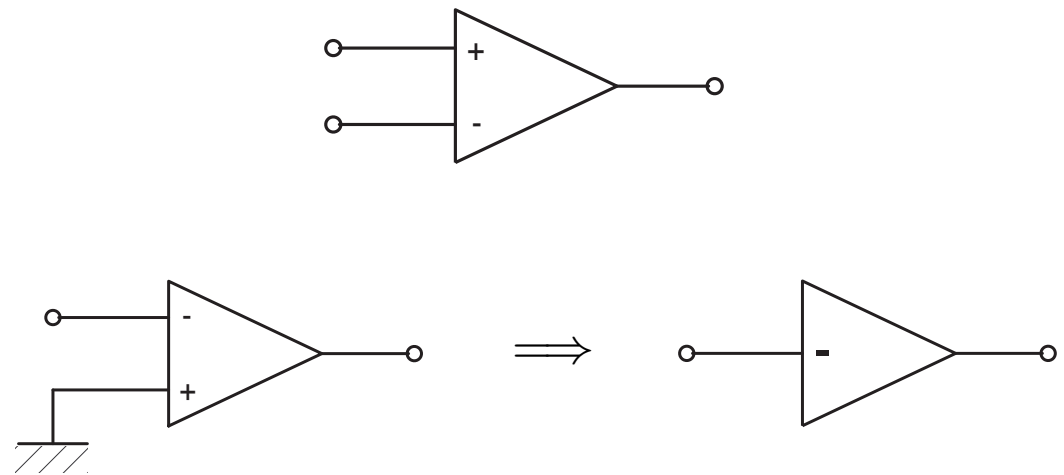
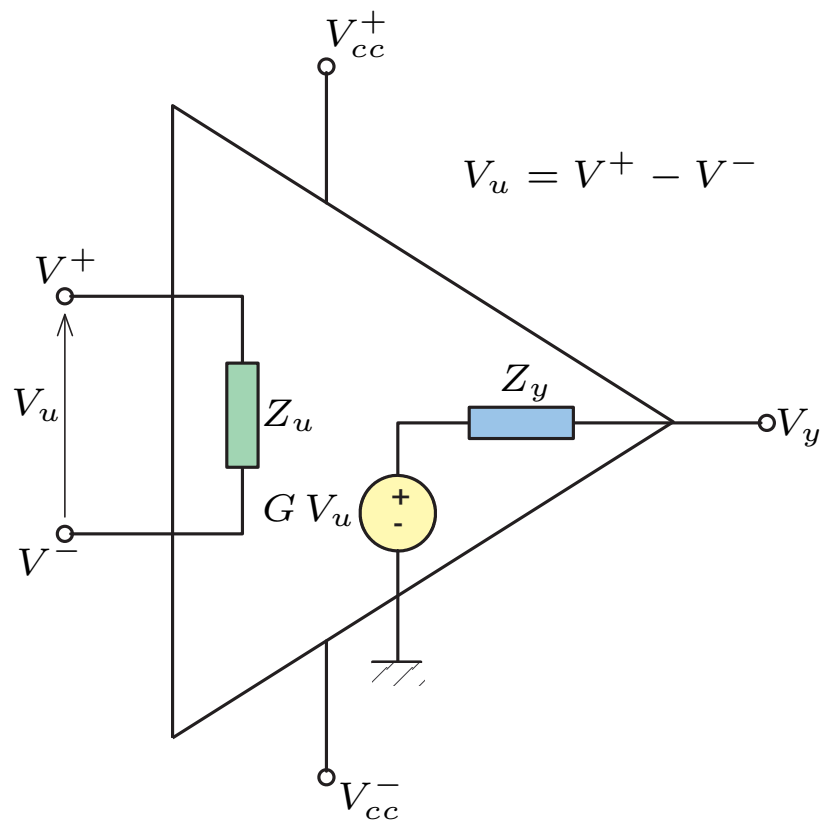
Risolvendo il loop algebrico si ottiene:

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{R_1 L_2}{L_1 L_2 - M^2} & -\frac{M (R_2 + R_c)}{L_1 L_2 - M^2} \\ -\frac{R_1 M}{L_1 L_2 - M^2} & -\frac{L_1 (R_2 + R_c)}{L_1 L_2 - M^2} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \frac{L_2}{L_1 L_2 - M^2} \\ \frac{M}{L_1 L_2 - M^2} \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & R_c \end{bmatrix}$$

Se  $M = \sqrt{L_1 L_2} \implies$  accoppiamento perfetto  $\implies$  modello di ordine 1

## Amplificatori operazionali

L'**amplificatore operazionale** è un amplificatore elettronico ad alto guadagno utilizzato per costruire circuiti elettrici il cui comportamento ingresso–uscita viene imposto mediante un collegamento in retroazione negativa attraverso un'opportuna rete elettrica esterna. È un componente fondamentale nella realizzazione di circuiti di amplificazione ed elaborazione analogica. È un componente attivo.



Spesso l'amplificatore operazionale viene utilizzato con l'ingresso non invertente collegato a massa.

## Amplificatore operazionale ideale

$$Z_u \approx \infty$$

$$Z_y \approx 0$$

$$G \approx \infty$$

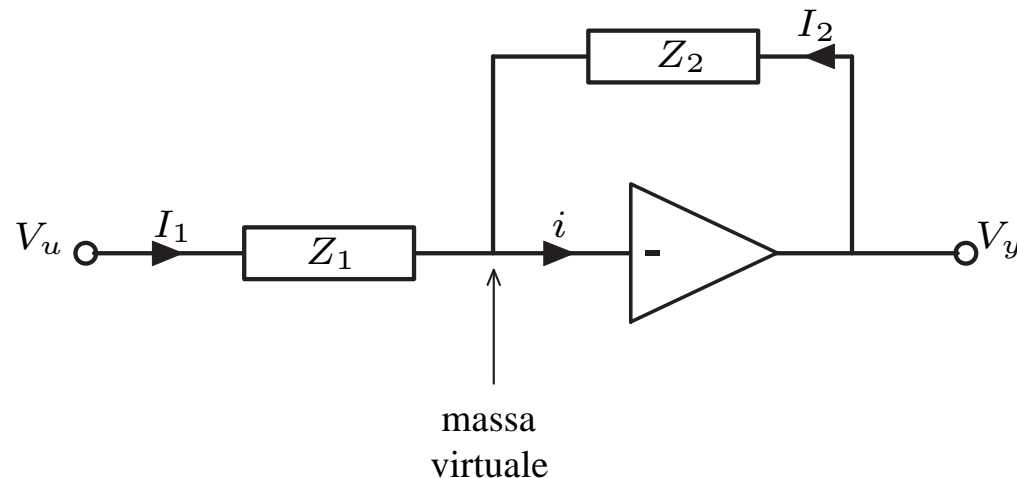
Poiché  $V_y = G(V^+ - V^-)$  ne segue che

$$V^+ - V^- \approx 0 \implies V^+ \approx V^- \implies \text{corto circuito virtuale}$$

La corrente entrante è considerata nulla. Se l'ingresso non invertente è collegato a massa

$$V_y = -G V^- \implies V^- \approx 0 \implies \text{massa virtuale}$$

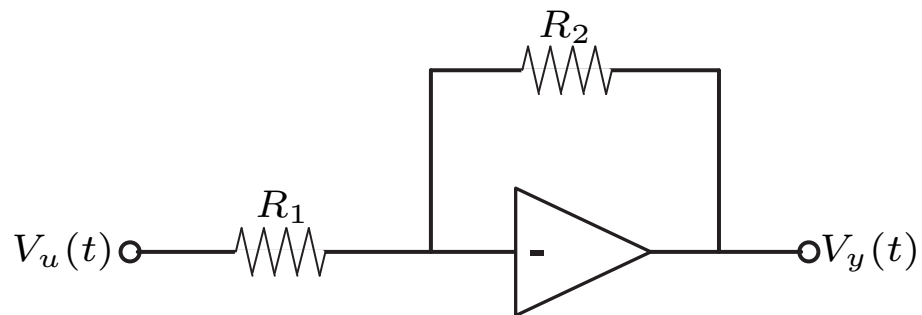
### Esempio: collegamento in retroazione



$$i = 0 \implies I_1 = -I_2$$

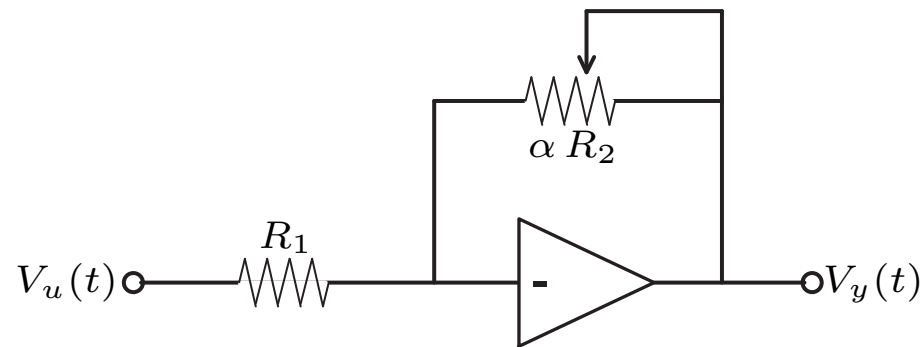
$$\frac{V_u}{Z_1} = -\frac{V_y}{Z_2} \implies \boxed{V_u = -\frac{Z_2}{Z_1} V_y}$$

Invertitore



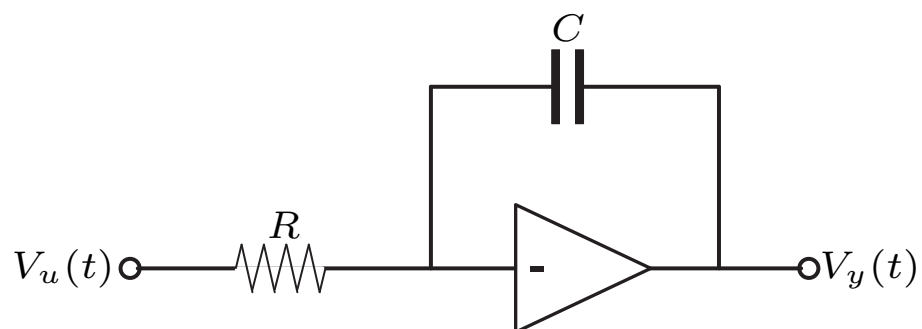
$$V_y(t) = -\frac{R_2}{R_1} V_u(t)$$

Invertitore con guadagno variabile



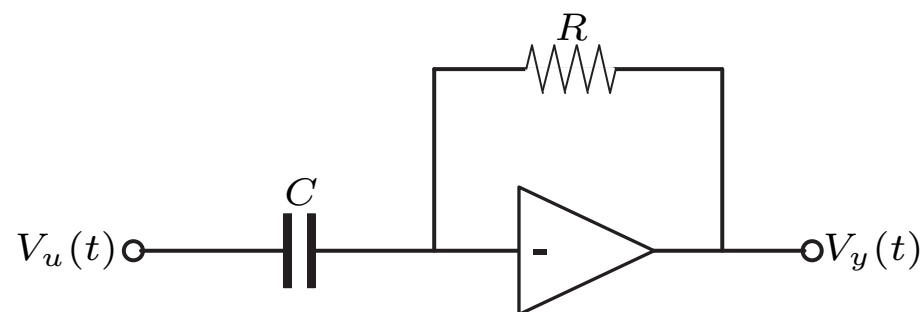
$$V_y(t) = -\alpha \frac{R_2}{R_1} V_u(t)$$

Integratore



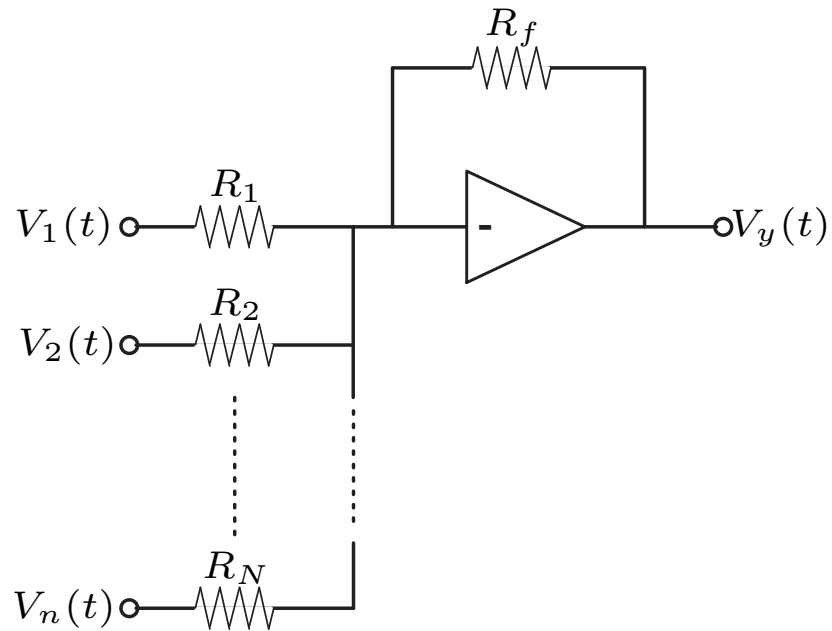
$$V_y(t) = -\frac{1}{RC} \int_0^t V_u(t) dt + V_u(0)$$

Derivatore



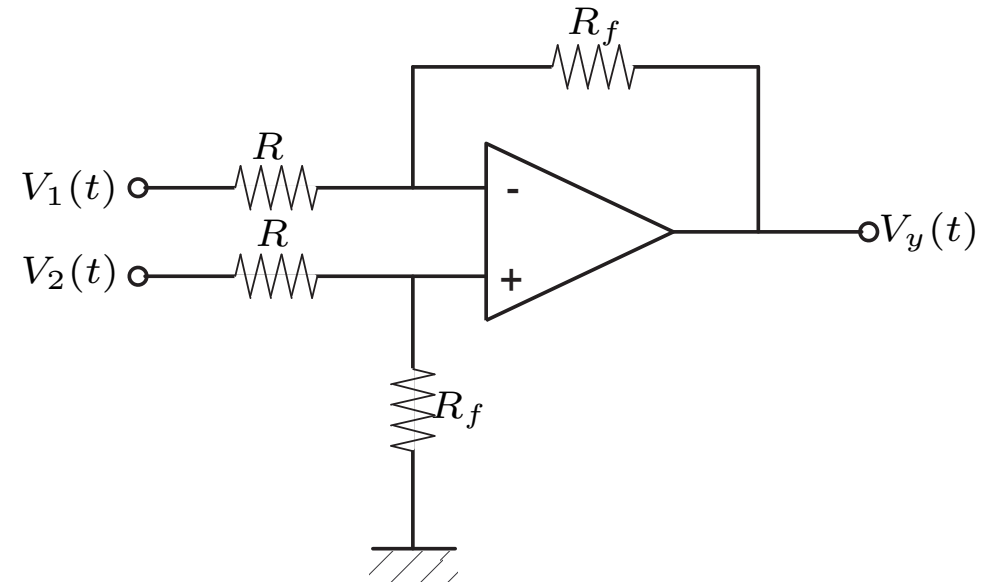
$$V_y(t) = -RC \frac{dV_u(t)}{dt}$$

### Sommatore



$$V_y(t) = - \sum_{i=1}^N \frac{R_f}{R_i} V_i(t)$$

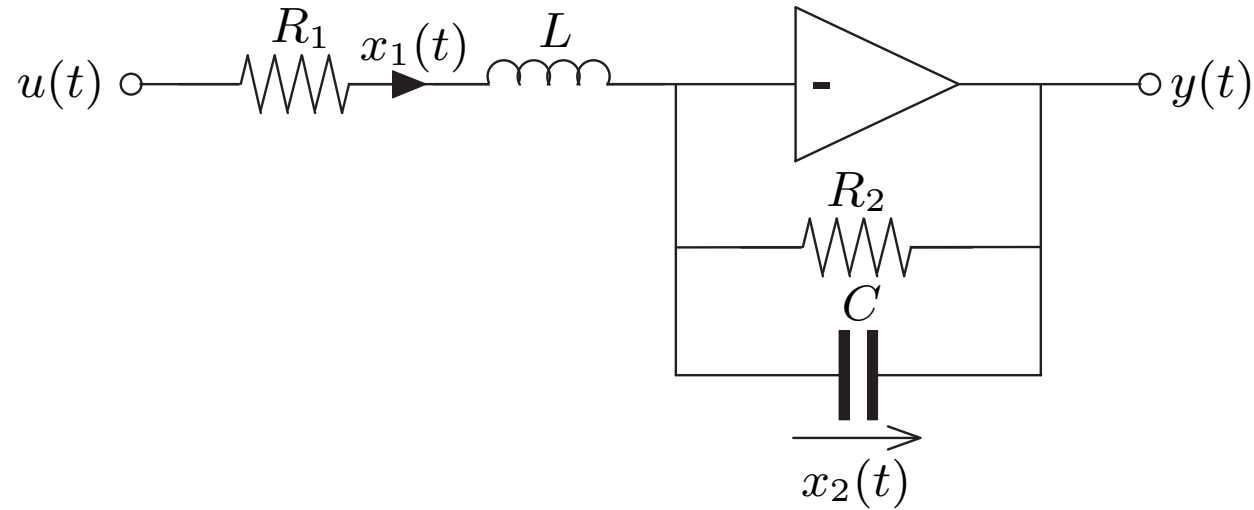
### Amplificatore differenziale



$$V_y(t) = - \frac{R_f}{R} (V_1(t) - V_2(t))$$

Modelli di reti elettriche con amplificatori operazionali ideali:

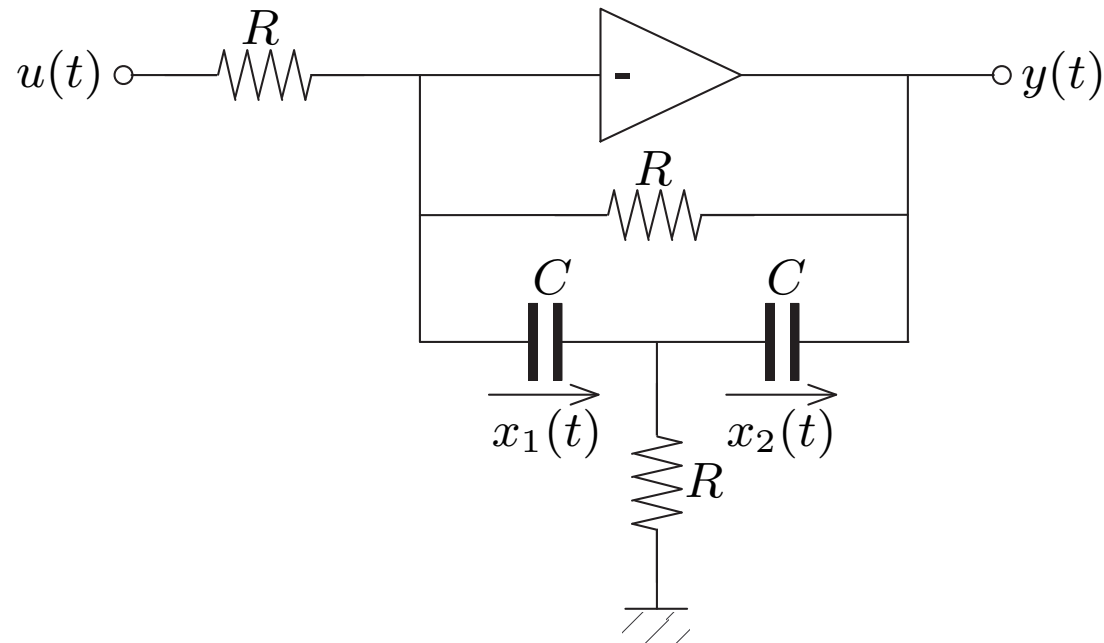
- corrente entrante nulla;
- $V^+ = V^-$  (corto circuito virtuale);
- se  $V^+ = 0 \Rightarrow V^- = 0$  (massa virtuale).

Esempio 1.

$$\begin{cases} u = R_1 x_1 + L \dot{x}_1 \\ C \dot{x}_2 = -\frac{x_2}{R_2} - x_1 \end{cases} \implies \begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{R_1}{L} x_1 + \frac{u}{L} \\ \dot{x}_2 = -\frac{x_1}{C} + -\frac{x_2}{R_2 C} \end{cases} \quad y = x_2$$

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{R_1}{L} & 0 \\ -\frac{1}{C} & -\frac{1}{R_2 C} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Esempio 2.

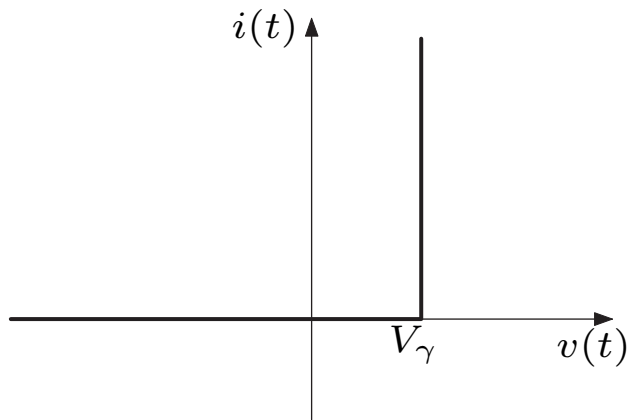
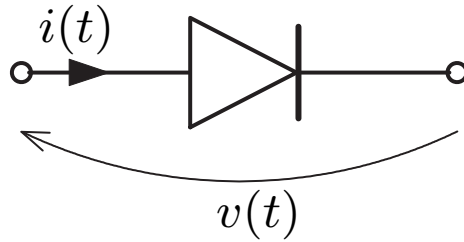
$$\begin{cases} C \dot{x}_1 = -\frac{u}{R} - \frac{x_1 + x_2}{R} \\ C \dot{x}_2 = C \dot{x}_1 + \frac{x_1}{R} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{x_1}{RC} - \frac{x_2}{RC} - \frac{u}{RC} \\ \dot{x}_2 = -\frac{x_2}{RC} - \frac{u}{RC} \end{cases} \quad y = x_1 + x_2$$

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{RC} & -\frac{1}{RC} \\ 0 & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -\frac{1}{RC} \\ -\frac{1}{RC} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

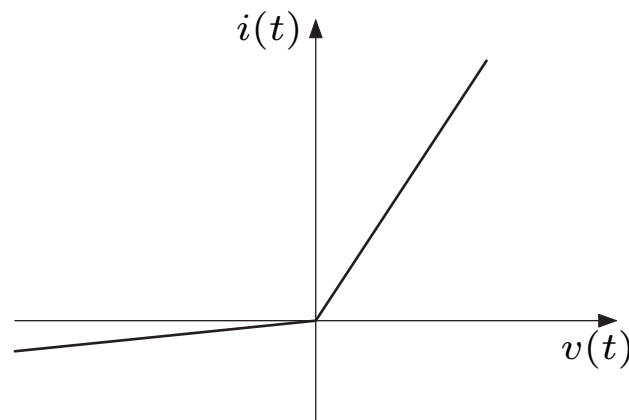
# Circuiti elettrici non lineari

## Diodo



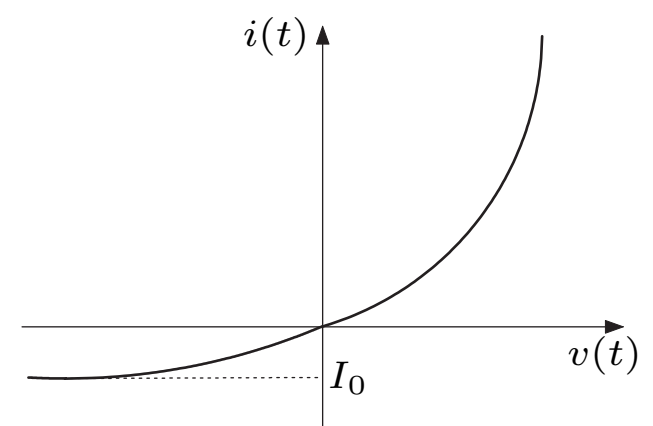
$$\begin{cases} i = 0 & v \leq V_\gamma \\ i > 0 & v = V_\gamma \end{cases}$$

(a)



$$i = \begin{cases} \frac{v}{R_2} & v < 0 \\ \frac{v}{R_1} & v \geq 0 \end{cases}$$

(b)

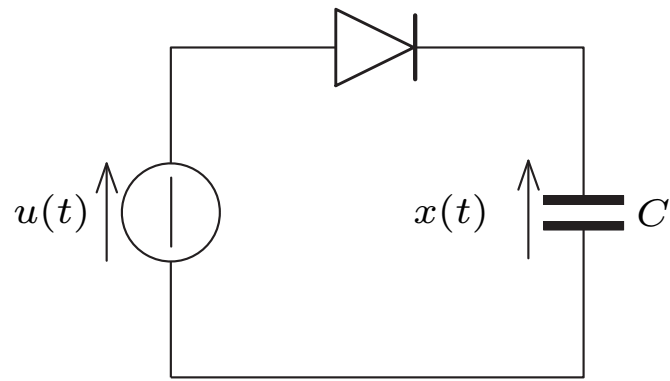


$$i(t) = I_0 (e^{\lambda v(t)} - 1)$$

(c)



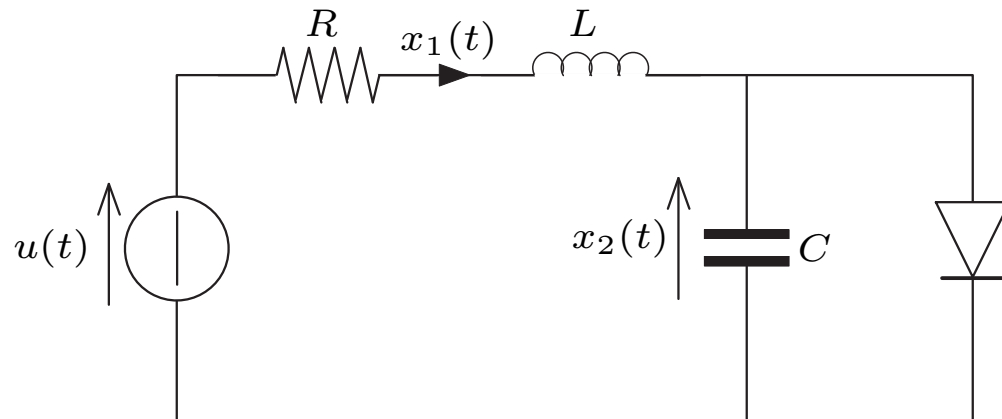
### Esempio 1.



$$(b) \quad \dot{x} = \begin{cases} \frac{u-x}{R_1 C} & u \geq x \\ \frac{u-x}{R_2 C} & u < x \end{cases}$$

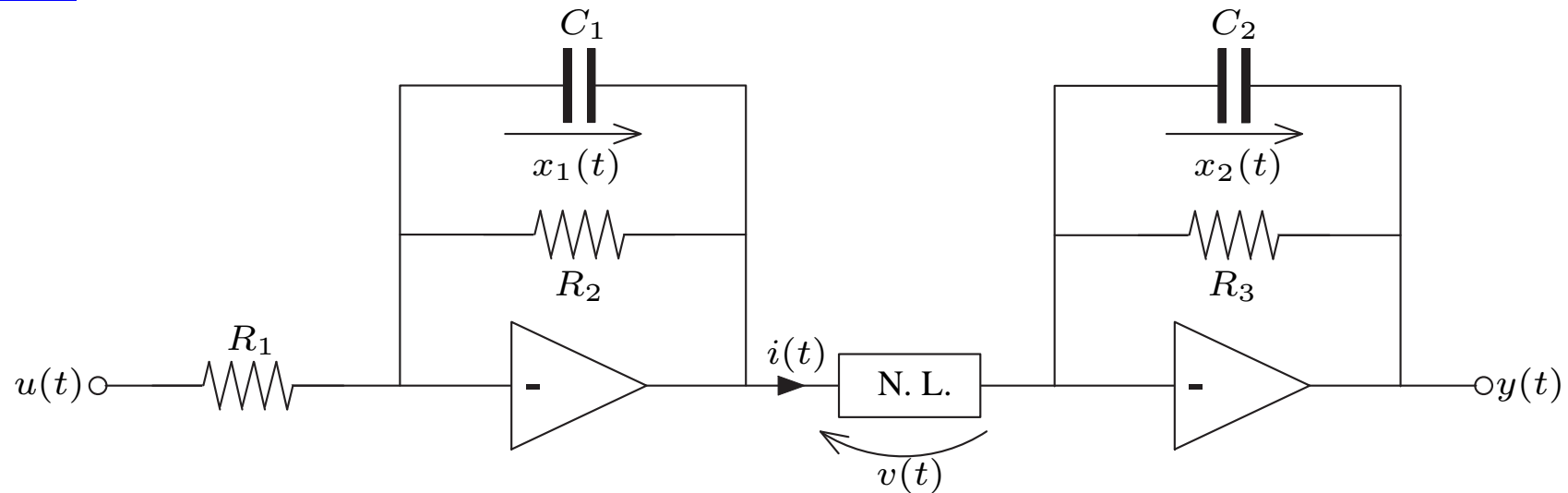
$$(c) \quad \dot{x} = \frac{I_0}{C} e^{\lambda(u-x)} - \frac{I_0}{C}$$

### Esempio 2.



$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{R}{L} x_1 - \frac{x_2}{L} + \frac{u}{L} \\ \dot{x}_2 = \frac{x_1}{C} - \frac{I_0}{C} e^{\lambda x_2} + \frac{I_0}{C} \end{cases}$$

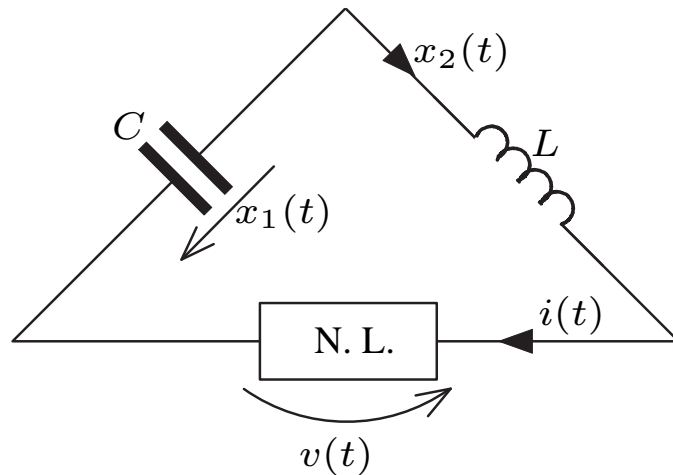
### Esempio 3.



$$\text{N. L.: } i(t) = k_1 v(t) + k_2 v^3(t)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{x_1}{R_2 C_1} - \frac{u}{R_1 C_1} \\ \dot{x}_2 = -\frac{k_1}{C_2} x_1 - \frac{k_2}{C_2} x_1^3 - \frac{x_2}{R_2 C_2} \end{cases} \quad y = x_2$$

**Nota:** l'elemento non lineare è una resistenza elettrica in quanto il grafico  $v - i$  giace nel primo e terzo quadrante.

Esempio 4: oscillatore di Van der Pol

$$v(t) = \alpha \left( \frac{i^3(t)}{3} - i(t) \right), \quad \alpha > 0$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{x_2}{C} \\ \dot{x}_2 = -\frac{x_1}{L} + \frac{\alpha}{L} x_2 - \frac{\alpha}{3L} x_2^3 \end{cases}$$

**Nota:** l'elemento non lineare non è una resistenza elettrica in quanto il grafico  $v - i$  giace anche nel secondo e quarto quadrante. È dunque un elemento attivo.