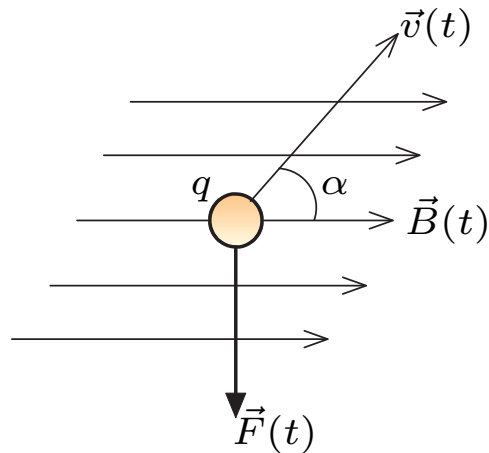


Modellistica di sistemi elettromeccanici

Legge di Lorentz: una carica elettrica q che si muove con velocità $\vec{v}(t)$ relativamente ad un campo magnetico di induzione $\vec{B}(t)$ è soggetta ad una forza



$$\vec{F} = q \vec{v}(t) \wedge \vec{B}(t) \quad (1)$$

$$F = q v B \sin \alpha$$

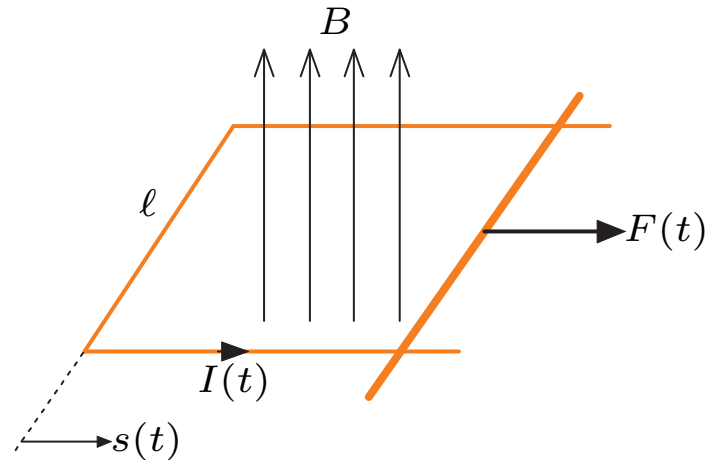
Quale forza agisce su un tratto di conduttore di sezione S e lunghezza ℓ , percorso da corrente I e sottoposto ad un campo magnetico di induzione B ? Se ci sono n particelle di carica q per unità di volume in moto con velocità \vec{v} , la corrente si può esprimere come

$$I = n q v S.$$

Poiché la forza su ogni carica è data dalla (1), la forza per unità di volume è $n q \vec{v}(t) \wedge \vec{B}(t)$ e quindi quella che agisce sul tratto di conduttore ha modulo pari a

$$F = B \ell I \sin \alpha.$$

Esempio 1. Si consideri un conduttore rettilineo mobile di lunghezza ℓ percorso dalla corrente $I(t)$, che si trova all'interno di un campo magnetico di induzione B costante ortogonale al conduttore stesso.

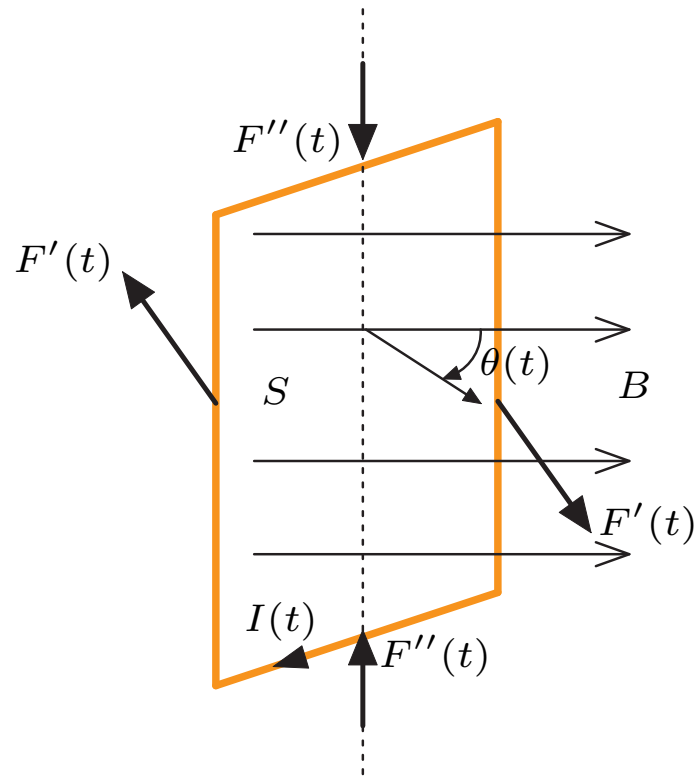


$$F(t) = B \ell I(t)$$

L'espressione $F = B \ell I$ è detta anche *legge dei motori*.

Un circuito elettrico mobile immerso in un campo magnetico e percorso da corrente è soggetto ad una forza ed inizia dunque a muoversi. Il flusso magnetico concatenato con il circuito è dunque variabile ed in esso si genera una forza elettromotrice \implies nei sistemi elettromeccanici la *legge dell'induzione elettromagnetica* e la *legge di Lorentz* si considerano sempre insieme. Con riferimento all'esempio sopra, la f.e.m. che si genera sarà tale da contrastare la corrente $I(t)$.

Esempio 2. Si consideri una spira di sezione S percorsa dalla corrente $I(t)$ ed immersa in un campo magnetico di induzione B costante.



Le forze $F'(t)$ tendono a deformare la spira

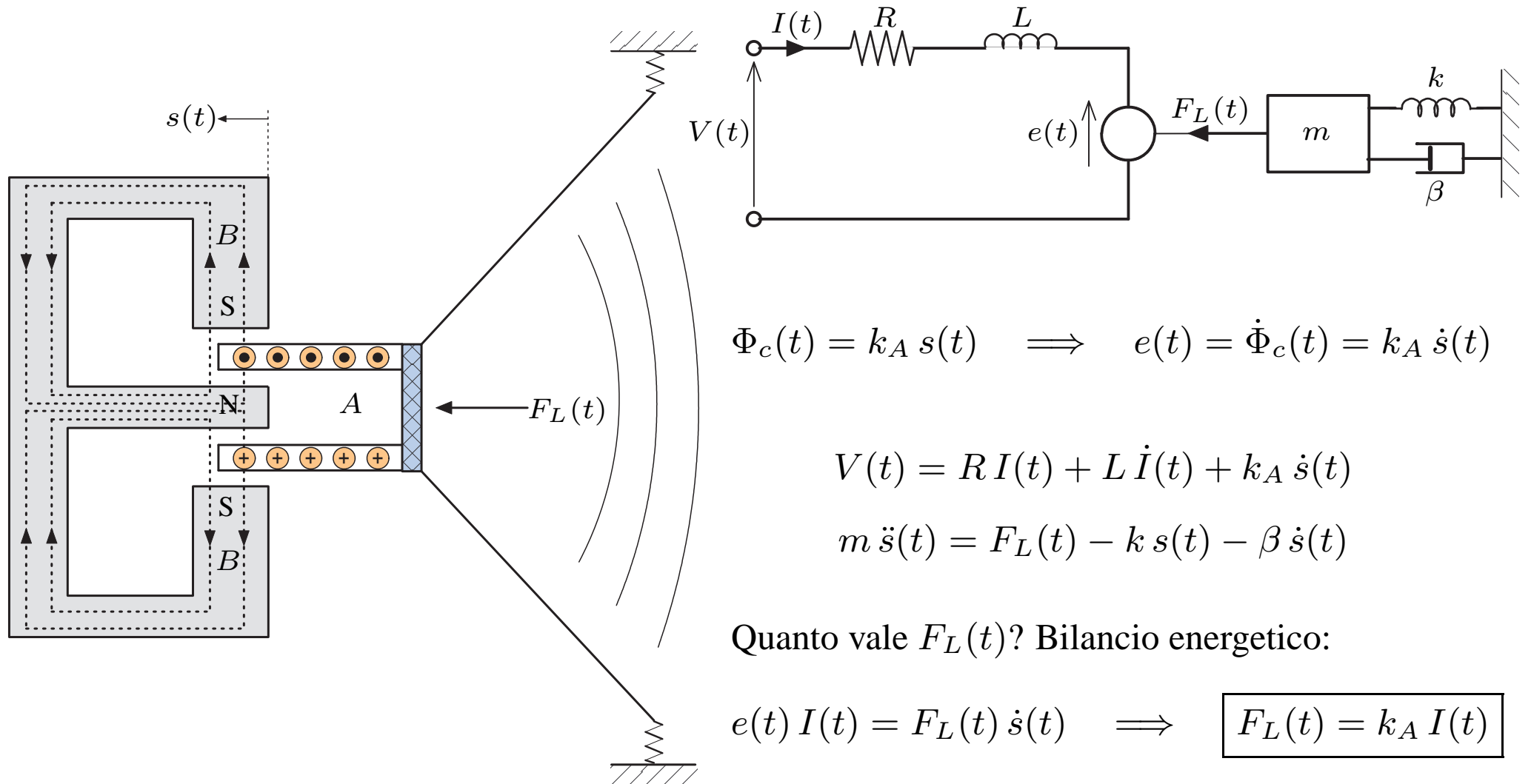
Le forze $F''(t)$ generano una coppia che tende a disporre la spira ortogonalmente al campo magnetico.

◇

Applicazioni della legge di Lorentz: motori elettrici, strumenti di misura (amperometri, voltmetri, wattmetri), altoparlanti e microfoni magnetici, sensori ad effetto Hall, etc.

Modelli nello spazio degli stati di sistemi elettromeccanici

Esempio 1: altoparlante magnetico



$$\Phi_c(t) = k_A s(t) \quad \Longrightarrow \quad e(t) = \dot{\Phi}_c(t) = k_A \dot{s}(t)$$

$$V(t) = R I(t) + L \dot{I}(t) + k_A \dot{s}(t)$$

$$m \ddot{s}(t) = F_L(t) - k s(t) - \beta \dot{s}(t)$$

Quanto vale $F_L(t)$? Bilancio energetico:

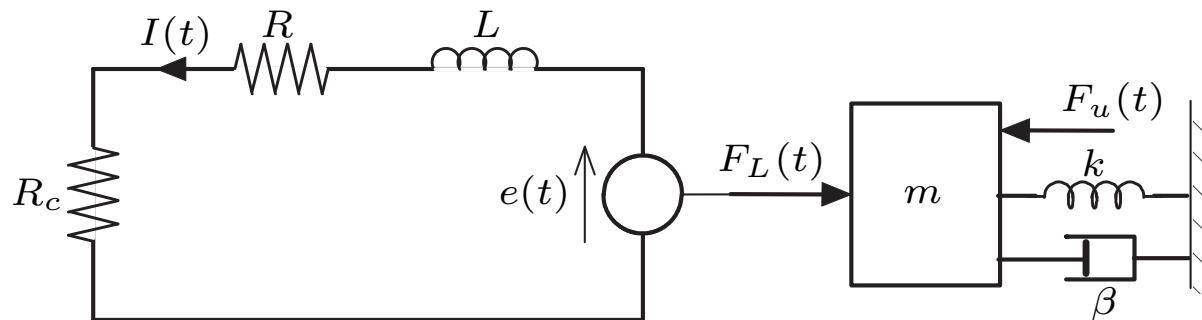
$$e(t) I(t) = F_L(t) \dot{s}(t) \quad \Longrightarrow \quad \boxed{F_L(t) = k_A I(t)}$$

$$x_1 = I \quad x_2 = s \quad x_3 = \dot{s} \quad u = V \quad y_1 = I \quad y_2 = \beta \dot{s}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{R}{L} x_1 - \frac{k_A}{L} x_3 + \frac{u}{L} \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = \frac{k_A}{m} x_1 - \frac{k}{m} x_2 - \frac{\beta}{m} x_3 \end{cases} \quad \begin{cases} y_1 = x_1 \\ y_2 = \beta x_3 \end{cases}$$

L'effetto utile dell'altoparlante è la potenza acustica $\beta \dot{s}^2$.

Sullo stesso principio di funzionamento si basa il microfono magnetico:

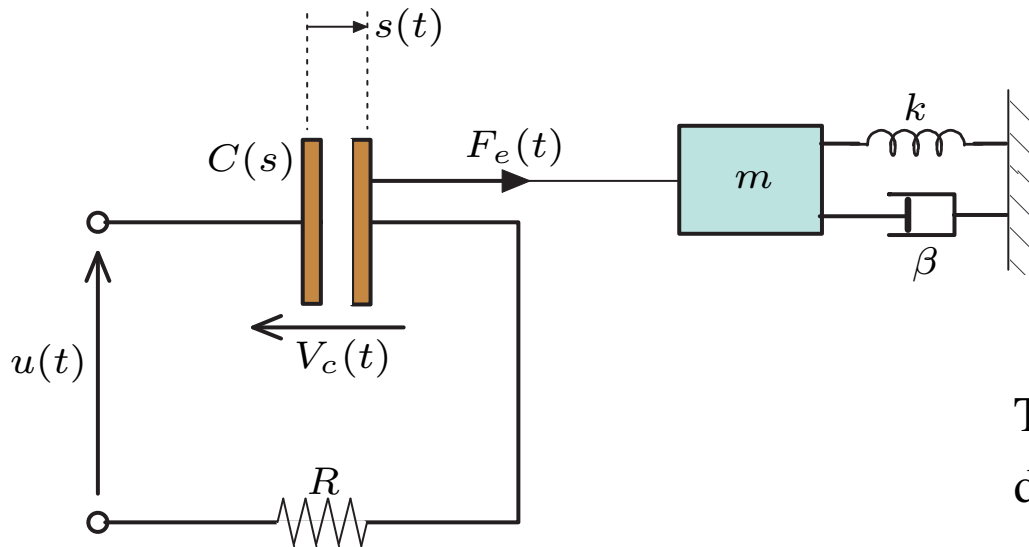


$$k_m \dot{s} = (R + R_c) I + L \dot{I}$$

$$m \ddot{s} = F_u(t) - k s - \beta \dot{s} - k_m I$$

dove $F_u(t) = P_u(t) A_m$ con $P_u(t)$ pressione acustica ed A_m area della membrana.

Esempio 2: condensatore con armatura mobile



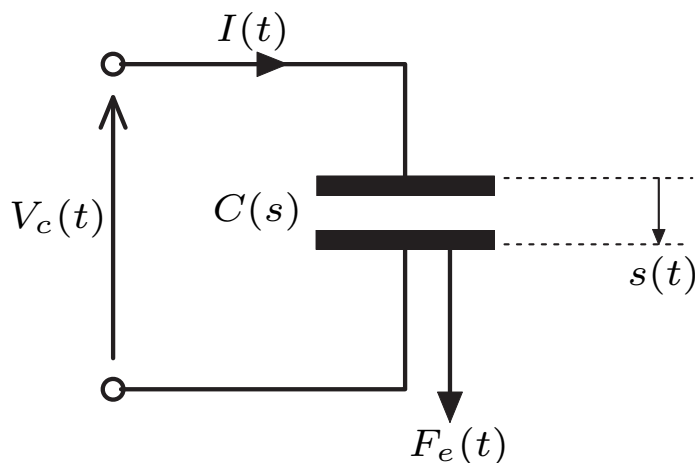
L'armatura di destra è mobile



$$C = C(s)$$

Tra le armature esiste una forza di attrazione dovuta al campo elettrico.

Quanto vale $F_e(t)$?



$$V_c = f_1(Q, s) \quad F_e = f_2(Q, s)$$

Bilancio energetico:

$$dE = V_c I dt = dE_e + F_e ds$$

dove E_e è l'energia immagazzinata dal campo elettrico:

$$E_e = f_3(Q, s)$$

$$dE_e(Q, s) = V_c dQ - F_e ds = \frac{\partial E_e(Q, s)}{\partial Q} dQ + \frac{\partial E_e(Q, s)}{\partial s} ds$$



$$V_c(Q, s) = \frac{\partial E_e(Q, s)}{\partial Q} \qquad F_e(Q, s) = -\frac{\partial E_e(Q, s)}{\partial s}$$

L'energia in una certo stato (Q, s) si può trovare integrando lungo un percorso qualunque. Se il condensatore è lineare si ha

$$Q(t) = C(s) V_c(t) \qquad F(0, s) = 0.$$

Si pu dunque integrare prima tra $(0, 0)$ e $(0, s)$ e poi tra $(0, s)$ e (Q, s) ottenendo

$$E_e(Q, s) = \int_0^Q \frac{Q}{C(s)} dQ = \frac{Q^2}{2C(s)}$$

e quindi

$$F_e(Q, s) = -\frac{\partial E_e(Q, s)}{\partial s} = \frac{Q^2}{2C^2(s)} \frac{dC(s)}{ds}$$

Condensatore ad armature piane e parallele di area A :

$$C(s) = \frac{\epsilon A}{s} = \frac{k_C}{s} \quad \Longrightarrow \quad F_e = -\frac{Q^2}{2k_C}$$

$$u = \frac{Q}{C} + R\dot{Q} = \frac{Qs}{k_C} + R\dot{Q}$$

$$m\ddot{s} = -\frac{Q^2}{2k_C} - k(s - s_0) - \beta\dot{s},$$

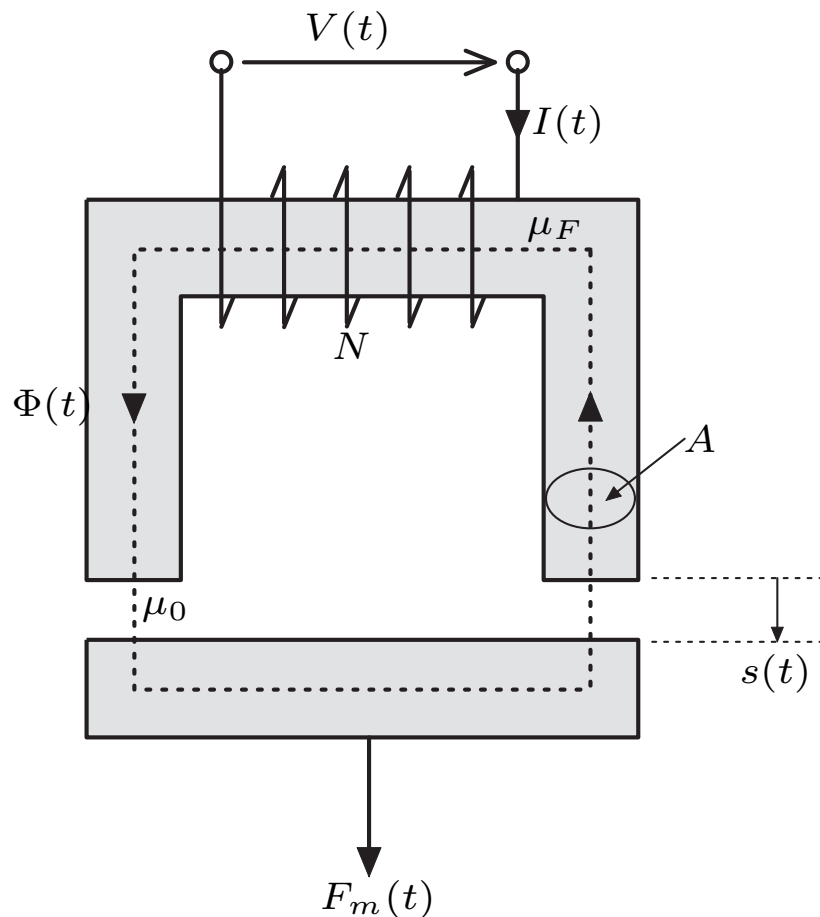
dove s_0 è la posizione dell'armatura con molla a riposo.

$$x_1 = Q \quad x_2 = s \quad x_3 = \dot{s} \quad y_1 = V_c \quad y_2 = s$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{x_1 x_2}{k_C R} + \frac{u}{R} & x_1 \geq 0 \\ \dot{x}_2 = x_3 & x_2 > 0 \\ \dot{x}_3 = -\frac{x_1^2}{2k_C m} - \frac{k}{m}(x_2 - s_0) - \frac{\beta}{m}x_3 \end{cases} \quad \begin{cases} y_1 = \frac{x_1 x_2}{k_C} \\ y_2 = x_2 \end{cases}$$

Applicazioni: microfono a condensatore.

Esempio 3: levitatore magnetico



L'elettromagnete magnetizza l'ancora



nasce una forza di attrazione dovuta al campo magnetico

\mathcal{R}_F : riluttanza percorso nel ferro

\mathcal{R}_0 : riluttanza percorso in aria

$$\mu_F \gg \mu_0 \implies \mathcal{R}_F \ll \mathcal{R}_0$$

$$N I(t) = \mathcal{R}_0 \Phi(t), \quad \mathcal{R}_0 = \frac{2 s(t)}{\mu_0 A}$$

$$\Phi_c(t) = N \Phi(t) \implies L = L(s) = \frac{\mu_0 A N^2}{2 s(t)} = \frac{k_m}{s(t)}$$

Quanto vale la forza di attrazione $F_m(t)$?

Bilancio energetico:

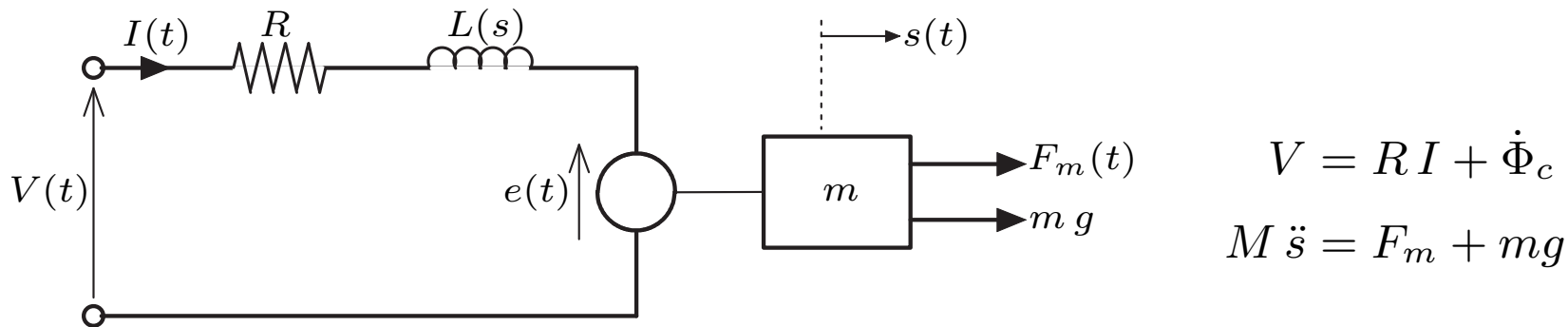
$$dE = I d\Phi_c = dE_m + F_m ds$$

dove E_m è l'energia immagazzinata dal campo magnetico: $E_m = f(\Phi_c, s)$

$$\implies dE_m(\Phi_c, s) = I d\Phi_c - F_m ds = \frac{\partial E_m(\Phi_c, s)}{\partial \Phi_c} d\Phi_c + \frac{\partial E_m(\Phi_c, s)}{\partial s} ds$$

Utilizzando l'approccio dell'esempio 2 si ottiene

$$E_m(\Phi_c, s) = \frac{\Phi_c^2}{2 L(s)} = \frac{L(s) I^2}{2} \implies F_m(\Phi_c, s) = \frac{\Phi_c^2}{2 L^2(s)} \frac{dL(s)}{ds} = \frac{I^2}{2} \frac{dL(s)}{ds} = -\frac{k_m}{2} \frac{I^2}{s^2}$$



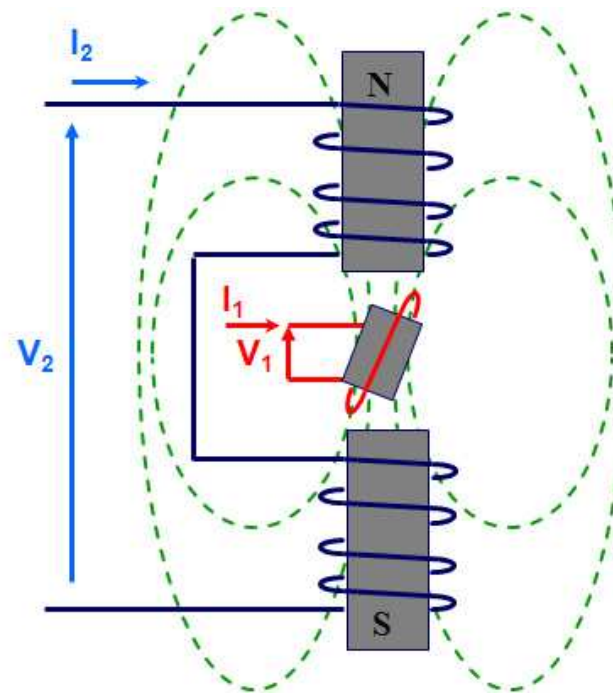
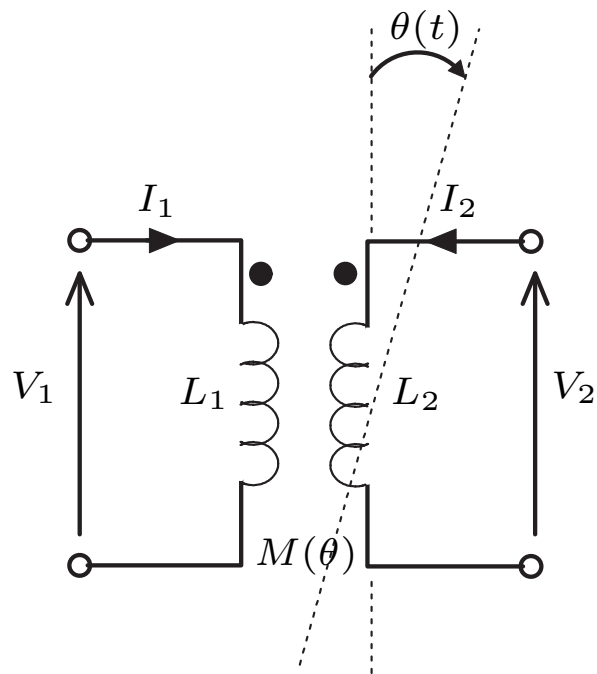
$$V = RI + L\dot{I} + \dot{L}I = RI + \frac{k_m}{s} \dot{I} - \frac{k_m}{s^2} \dot{s} I$$

$$m\ddot{s} = -\frac{k_m}{2} \frac{I^2}{s^2} + mg$$

$$x_1 = I \quad x_2 = s \quad x_3 = \dot{s} \quad u = V \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{R}{k_m} x_1 x_2 + \frac{u x_2}{k_m} \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = -\frac{k_m}{2m} \frac{x_1^2}{x_2^2} + g \end{cases}$$

Esempio 4: dinamica di due circuiti mutuamente accoppiati

Si considerino due circuiti mutuamente accoppiati, il primo immobile e il secondo in grado di ruotare intorno ad un asse fisso. In tale caso il coefficiente di mutua induzione dipende dalla posizione angolare $\theta(t)$ del circuito mobile.



$$\begin{cases} \Phi_{c1} = L_1 I_1 + M(\theta) I_2 \\ \Phi_{c2} = L_2 I_2 + M(\theta) I_1 \end{cases} \implies \begin{cases} V_1 = \dot{\Phi}_{c1} = L_1 \dot{I}_1 + M(\theta) \dot{I}_2 + K(\theta) \dot{\theta} I_2 \\ V_2 = \dot{\Phi}_{c2} = L_2 \dot{I}_2 + M(\theta) \dot{I}_1 + K(\theta) \dot{\theta} I_1 \end{cases}$$

dove

$$K(\theta) = \frac{dM(\theta)}{d\theta}$$

Bilancio energetico:

$$\begin{aligned} V_1 I_1 + V_2 I_2 &= L_1 \dot{I}_1 I_1 + M(\theta) \dot{I}_2 I_1 + K(\theta) \dot{\theta} I_2 I_1 \\ &+ L_2 \dot{I}_2 I_2 + M(\theta) \dot{I}_1 I_2 + K(\theta) \dot{\theta} I_1 I_2 = \frac{dE_m}{dt} + C_m \dot{\theta} \end{aligned}$$

Si può dimostrare che

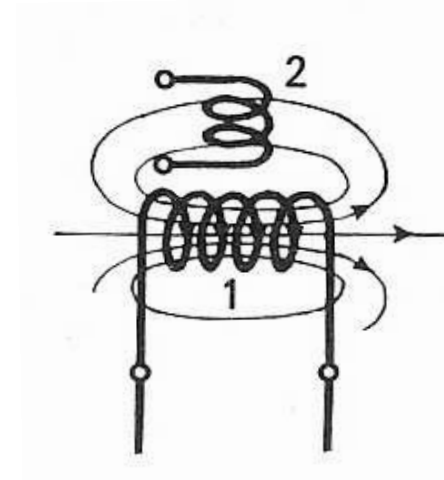
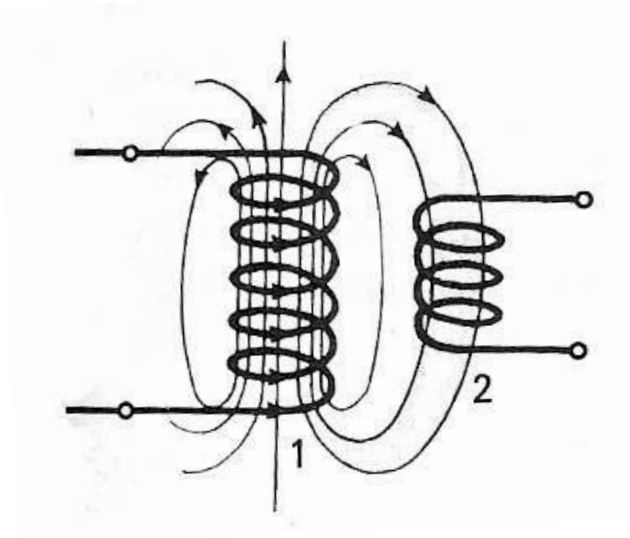
$$E_m(\Phi_{c1}, \Phi_{c2}, \theta) = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + M(\theta) I_1 I_2$$



$$\boxed{C_m(t) = K(\theta) I_1(t) I_2(t)}$$

Accoppiamento massimo

Accoppiamento minimo



$$|M(\theta)| = \max$$

$$|M(\theta)| = \min \quad (M(\theta) \approx 0)$$

$$|K(\theta)| = \min \quad (K(\theta) \approx 0)$$

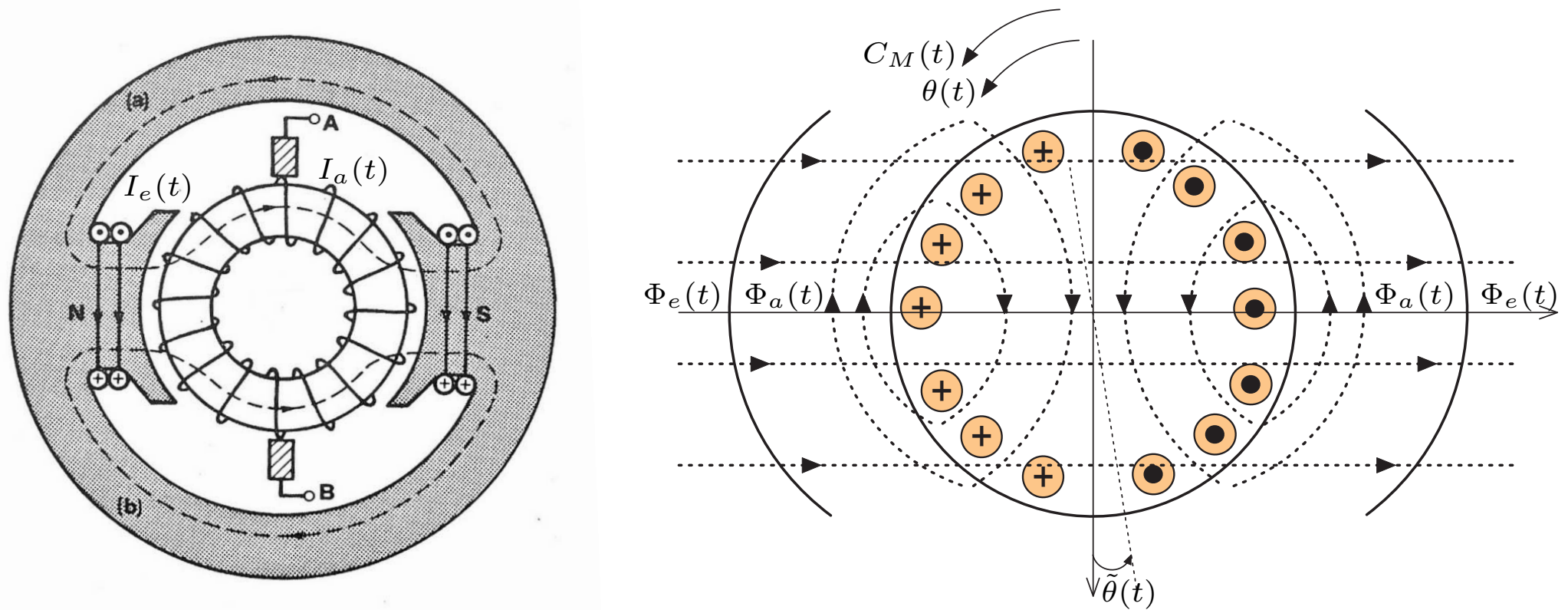
$$|K(\theta)| = \max$$

$$|C(\theta)| = \min \quad (C(\theta) \approx 0)$$

$$|C(\theta)| = \max$$

- Quando la coppia è massima gli effetti della mutua induzione sono minimi e viceversa.

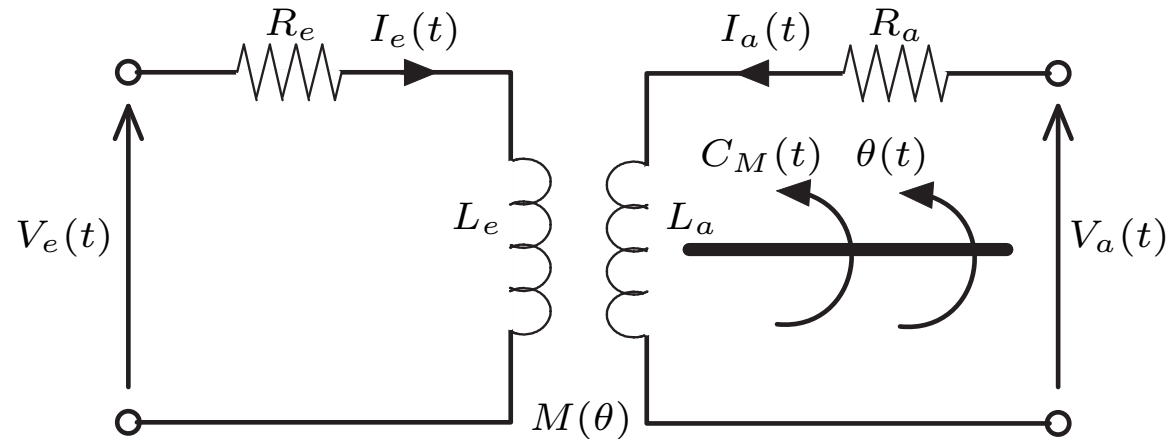
Motore in corrente continua



$\Phi_e(t)$ e $\Phi_a(t)$ sono i flussi generati dalla corrente di eccitazione $I_e(t)$ e dalla corrente di armatura $I_a(t)$. $\tilde{\theta}(t)$ è l'angolo tra gli assi dei flussi magnetici ed è funzione dell'angolo di rotazione del motore: $\tilde{\theta}(t) = f(\theta(t))$. I circuiti di eccitazione ed armatura sono dunque mutuamente accoppiati e si ha:

$$M = g(\tilde{\theta}) = f(\theta).$$

● Ipotesi 1: linearità del circuito magnetico

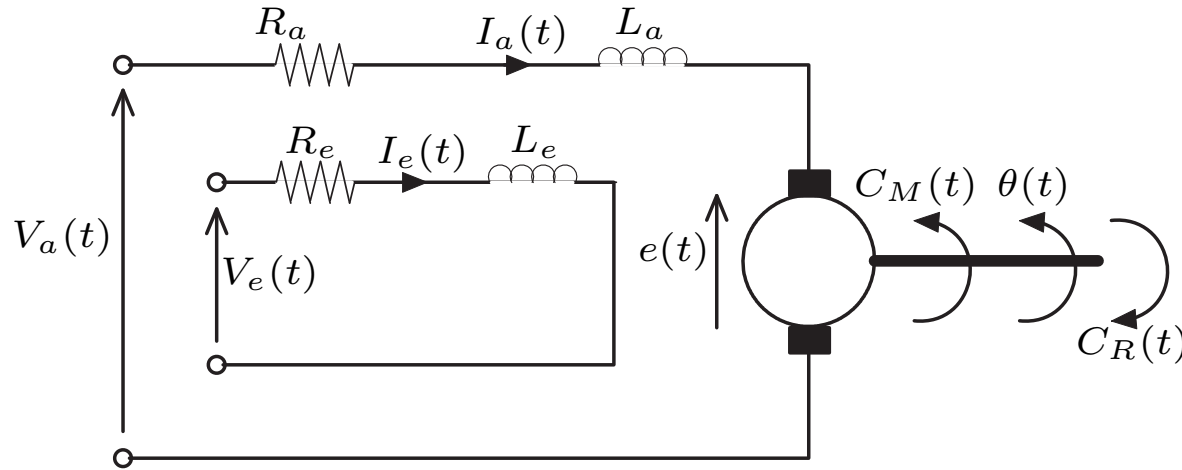


$$\begin{cases} V_e = R_e I_e + L_e \dot{I}_e + M(\theta) \dot{I}_a + K(\theta) I_a \dot{\theta} \\ V_a = R_a I_a + L_a \dot{I}_a + M(\theta) \dot{I}_e + K(\theta) I_e \dot{\theta} \\ C_M = K(\theta) I_e I_a \end{cases}$$

● Ipotesi 2: gli assi magnetici sono sempre ortogonali $\implies M(\theta) \approx 0, K(\theta) \approx K_{\max} = K_M$

● Ipotesi 3: effetto del circuito di armatura su quello di eccitazione trascurabile $\implies I_e$ indipendente da I_a

$$\begin{cases} V_e = R_e I_e + L_e \dot{I}_e \\ V_a = R_a I_a + L_a \dot{I}_a + K_M I_e \dot{\theta} \\ C_M = K_M I_e I_a \end{cases}$$



J : momento di inerzia albero motore

β : coefficiente di attrito albero motore

$C_R(t)$: coppia resistente

$$x_1 = I_e \quad x_2 = I_a \quad x_3 = \theta \quad x_4 = \dot{\theta} \quad u_1 = V_e \quad u_2 = V_a \quad u_3 = C_R$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{R_e}{L_e} x_1 + \frac{u_1}{L_e} \\ \dot{x}_2 = -\frac{R_a}{L_a} x_2 - \frac{K_M}{L_a} x_1 x_4 + \frac{u_2}{L_a} \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = \frac{K_M}{J} x_1 x_2 - \frac{\beta}{J} x_4 - \frac{u_3}{J} \end{cases}$$

Se $V_e(t) = \text{costante} \implies I_e(t) = \text{costante} \implies$ modello di ordine 3 (lineare)

$$x_1 = I_a \quad x_2 = \theta \quad x_3 = \dot{\theta} \quad u_1 = V_a \quad u_2 = C_R$$

Posto $K'_M = K_M I_e$ si ha:

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{R_a}{L_a} & 0 & -\frac{K'_M}{L_a} \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{K'_M}{J} & 0 & -\frac{\beta}{J} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_a} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{J} \end{bmatrix}$$

A volte la dinamica della parte elettrica viene trascurata \implies modello di ordine 2 (lineare)

$$J \ddot{\theta} = K'_M \frac{V_a - K'_M \dot{\theta}}{R_a} - \beta \dot{\theta} - C_R$$



$$J \ddot{\theta} = -\left(\beta + \frac{K'^2_M}{R_a}\right) \dot{\theta} + \frac{K'_M}{R_a} V_a - C_R$$