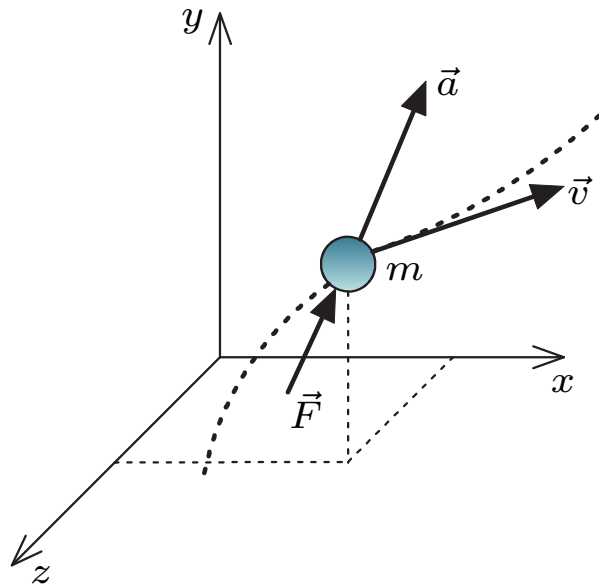


Modellistica di sistemi meccanici

Principi della dinamica

1° principio (principio di inerzia): un corpo non soggetto a forze si trova in quiete o si muove di moto rettilineo uniforme.

2° principio (equazione fondamentale della dinamica): un corpo soggetto ad una forza \vec{F} si muove secondo la legge $m \vec{a} = \vec{F}$, dove \vec{a} è l'accelerazione e m la massa inerziale.



$$m \vec{a} = \vec{F}, \quad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\vec{F} \equiv (F_x, F_y, F_z)$$

$$\vec{a} \equiv (a_x, a_y, a_z)$$

$$\vec{v} \equiv (v_x, v_y, v_z) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right)$$

Il secondo principio vale rispetto ad un sistema di riferimento *inerziale*.

Se la massa non è costante la formulazione corretta è (bilancio della quantità di moto)

$$\frac{d}{dt}(m \vec{v}) = \vec{F}$$

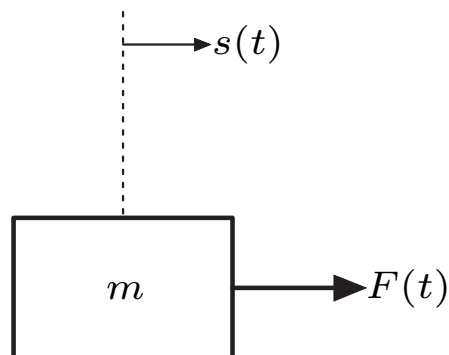
ed è necessario considerare anche il bilancio di massa.

3° principio (principio di azione e reazione): se un corpo A esercita una forza \vec{F}_B su un corpo B , allora il corpo B esercita su A , nello stesso istante, una forza \vec{F}_A avente la stessa retta di azione di \vec{F}_B , uguale modulo e verso contrario.

Inerzie meccaniche: masse, momenti di inerzia

Massa.

Per i moti di pura traslazione:



$$m \ddot{s}(t) = F(t)$$

oppure

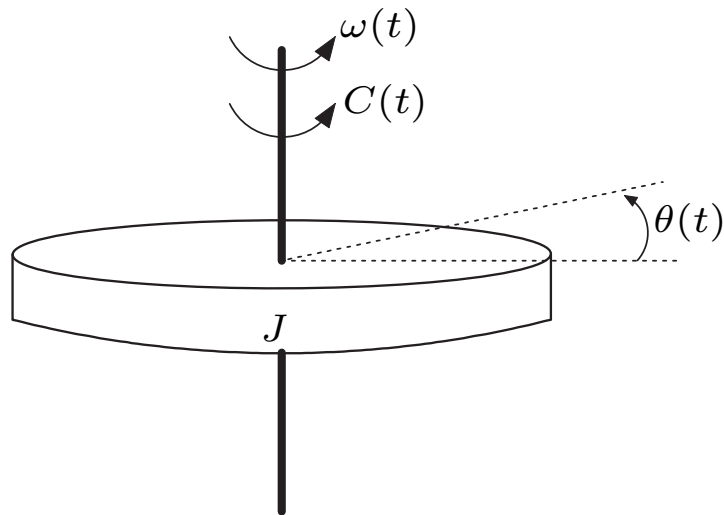
$$m \dot{v}(t) = F(t), \quad v(t) = \dot{s}(t)$$

Il lavoro della forza si accumula sotto forma di *energia cinetica*:

$$E_c = \int F(t) ds = \int m \ddot{s}(t) ds = \int m v(t) dv = \frac{1}{2} m v^2(t)$$

Momento di inerzia.

Per i moti di pura rotazione:



$$J \ddot{\theta}(t) = C(t)$$

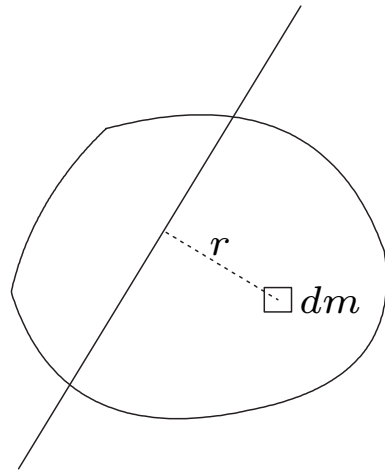
oppure

$$J \dot{\omega}(t) = C(t), \quad \omega(t) = \dot{\theta}(t)$$

$C(t)$: coppia applicata (momento della forza applicata rispetto all'asse di rotazione)

$\omega(t)$: velocità angolare

J : momento di inerzia, dipende da come la massa del corpo è distribuita intorno all'asse di rotazione



$$J = \int r^2 dm$$

L'energia cinetica accumulata vale

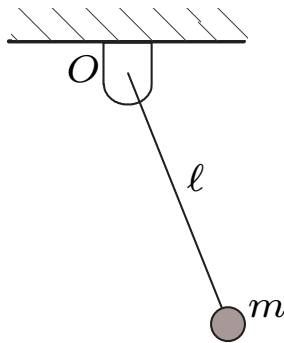
$$E_c = \int C(t) d\theta = \int J \ddot{\theta}(t) d\theta = \int J \omega(t) d\omega = \frac{1}{2} J \omega^2(t).$$

La coppia dimensionalmente è una energia e si può sempre esprimere come un prodotto forza \times braccio.

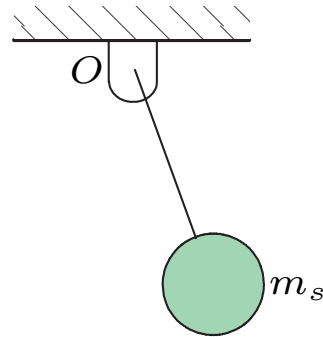
Teorema (Huygens–Steiner). Sia J_G il momento di inerzia di un corpo di massa m rispetto ad un asse baricentrale. Il momento di inerzia J rispetto ad un asse parallelo a quello baricentrale vale

$$J = J_G + m d^2,$$

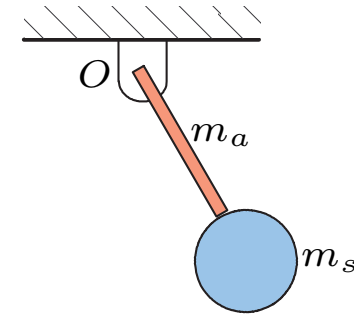
dove d è la distanza tra i due assi.

Esempio.

(a)



(b)



(c)

Caso (a): massa puntiforme a distanza ℓ dall'asse di rotazione O , asta priva di massa

$$J_O = m \ell^2$$

Caso (b): sfera di massa m_s e raggio r il cui baricentro G_s dista ℓ_s dall'asse di rotazione O , asta priva di massa

$$J_{G_s} = \frac{2}{5} m_s r^2 \quad \Longrightarrow \quad J_O = J_{G_s} + m_s \ell_s^2$$

Caso (c): sfera di massa m_s e raggio r il cui baricentro G_s dista ℓ_s dall'asse di rotazione O + asta di lunghezza l_a il cui baricentro G_a dista $\frac{\ell_a}{2}$ dall'asse di rotazione O

$$J_{G_s} = \frac{2}{5} m_s r^2, \quad J_{G_a} = \frac{m_a \ell_a^2}{12} \quad \Longrightarrow \quad J_O = J_{G_s} + m_s \ell_s^2 + J_{G_a} + m_a \frac{\ell_a^2}{4}$$

Come modellare sistemi meccanici complessi?

Equazioni cardinali della dinamica.

$$\begin{aligned}\dot{\vec{Q}} &= \sum_i \vec{F}^i \\ \dot{\vec{P}}_\Omega + m \vec{v}_\Omega \wedge \vec{v}_G &= \sum_i \vec{M}_\Omega^i,\end{aligned}$$

\vec{Q} = quantità di moto totale;

\vec{F}_i = forze esterne attive e vincolari;

\vec{P}_Ω = momento della quantità di moto rispetto al polo di riduzione Ω ;

m = massa totale;

\vec{v}_Ω = velocità del polo di riduzione;

\vec{v}_G = velocità del baricentro;

\vec{M}_Ω^i = momenti delle forze esterne attive e vincolari rispetto ad Ω .

- Ciascun vettore ha componenti lungo gli assi (x, y, z) \Rightarrow sei equazioni.
- La seconda equazione può essere semplificata scegliendo come polo di riduzione Ω un punto fisso (quando possibile) o il baricentro G .

Si ha:

$$\vec{Q} = m \vec{v}_G$$

$$\vec{P}_\Omega = \vec{P}_G + \Omega \vec{G} \wedge m \vec{v}_G$$

$$\vec{P}_G = M_G \vec{\omega},$$

dove

$$M_G = \begin{bmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{xy} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{xz} & J_{yz} & J_{zz} \end{bmatrix},$$

è la *matrice di inerzia*.

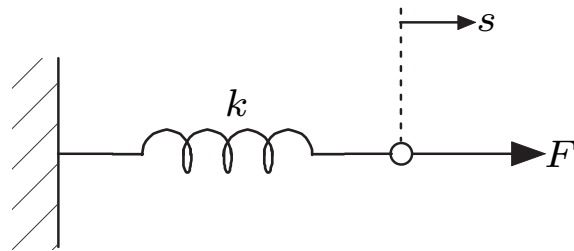
- Molti sistemi meccanici di interesse non richiedono sei gradi di libertà e si possono scomporre in sistemi elementari utilizzando i *diagrammi di corpo libero* \Rightarrow si utilizzano equazioni semplificate del tipo

$$m a = \sum_i F^i$$

$$J \dot{\omega} = \sum_i C^i.$$

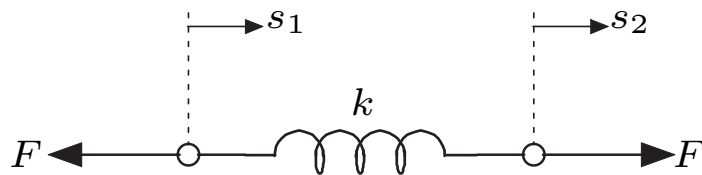
Capacità meccaniche: molle

La molla può essere un elemento volutamente inserito in un sistema meccanico (es. sospensione autoveicolo) oppure si utilizza per rappresentare l'elasticità di un elemento quando non è trascurabile (es. albero sottoposto a torsione, barra sottoposta ad allungamento). Quando la molla viene deformata per mezzo di una forza F , reagisce con una forza f_e che si oppone al movimento e che dipende dallo spostamento. Per una molla priva di massa si ha: $F = f_e$.

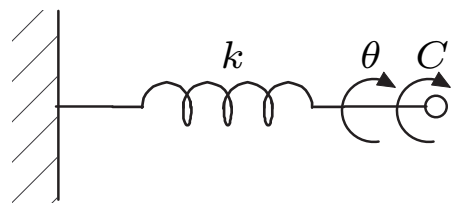


$$F = k s$$

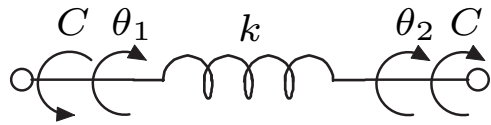
$$\dot{F} = k \dot{s} = k v \text{ (poco utile)}$$



$$F = k (s_2 - s_1)$$



$$C = k \theta$$

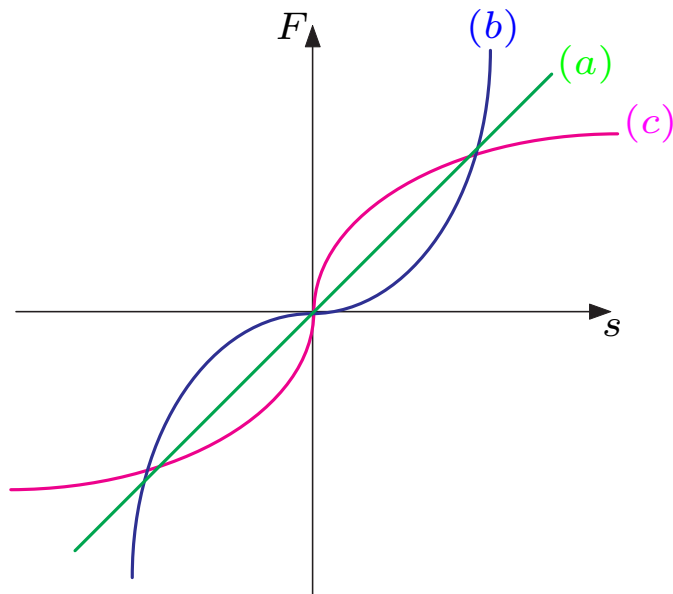


$$C = k(\theta_2 - \theta_1)$$

Il lavoro della forza viene accumulato sotto forma di **energia potenziale elastica**

$$E_p = \int F(t) ds = \int k s(t) ds = \frac{1}{2} k s^2(t)$$

Spesso il comportamento è non lineare oppure è lineare solo per piccole deformazioni.



- (a) molla lineare
- (b) molla “hard”
- (c) molla “soft”

Esempi:

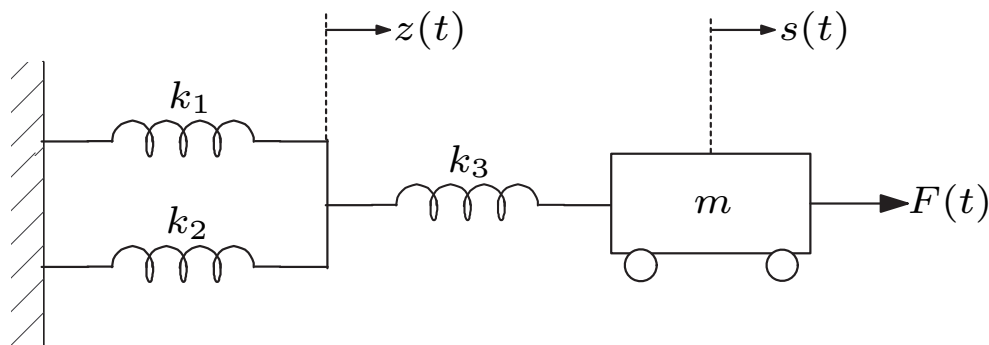
$$F = k_1 s + k_2 s^3 \text{ oppure } F = k_1 (s_2 - s_1) + k_2 (s_2 - s_1)^3 \text{ con } k_1 > 0, k_2 > 0 \text{ (hard)}$$

$$F = k_1 s - k_2 s^3 \text{ oppure } F = k_1 (s_2 - s_1) - k_2 (s_2 - s_1)^3 \text{ con } k_1 > 0, k_2 > 0 \text{ (soft)}$$

In generale: funzioni polinomiali

Attenzione: per i termini con potenze pari il modello corretto è del tipo

$$F = k |s| s \quad \text{oppure} \quad F = k s^2 \operatorname{sgn}(s), \quad \operatorname{sgn}(s) = \begin{cases} s & \text{se } s \geq 0 \\ -s & \text{se } s < 0 \end{cases}$$

Esempio: molle in serie e in parallelo

$$m \ddot{s} = F - k_3 (s - z)$$

$$0 = k_3 (s - z) - k_1 z - k_2 z$$

$$z = \frac{k_3}{k_1 + k_2 + k_3} s \quad \Rightarrow \quad m \ddot{s} = F - k_3 s + \frac{k_3^2}{k_1 + k_2 + k_3} s = F - k_{eq} s \quad \Rightarrow$$

$$\implies k_{eq} = \frac{k_3 (k_1 + k_2)}{k_1 + k_2 + k_3}$$



Valgono dunque le seguenti regole:

$$\text{serie : } \frac{1}{k_{eq}} = \sum_i \frac{1}{k_i}$$

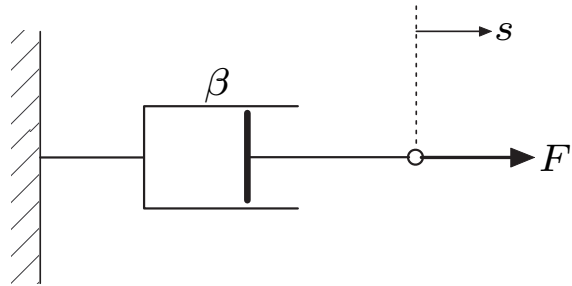
$$\text{parallelo : } k_{eq} = \sum_i k_i$$

Resistenze meccaniche: smorzatori, attriti

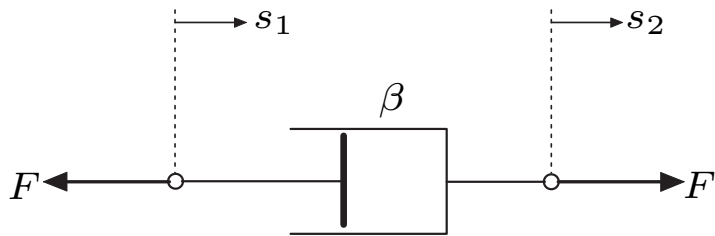
Gli elementi di tipo resistivo non accumulano energia ma la dissipano (sotto forma di calore).

Smorzatori.

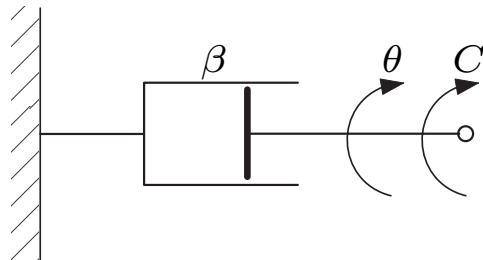
La smorzatore può essere un elemento volutamente inserito in un sistema meccanico (es. sospensione autoveicolo) oppure si utilizza per rappresentare *l'attrito* causato dal moto di un corpo in un fluido (liquido o gas). Se sollecitato attraverso una forza F , lo smorzatore reagisce con una forza f_a che si oppone al movimento e che dipende dalla velocità. Per uno smorzatore privo di massa si ha: $F = f_a$.



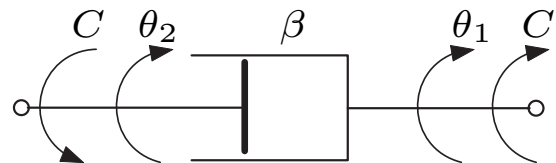
$$F = \beta \dot{s}$$



$$F = \beta (\dot{s}_2 - \dot{s}_1) = \beta (v_2 - v_1)$$



$$C = \beta \dot{\theta}$$



$$C = \beta (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) = \beta (\omega_2 - \omega_1)$$

La potenza dissipata in uno smorzatore lineare è:

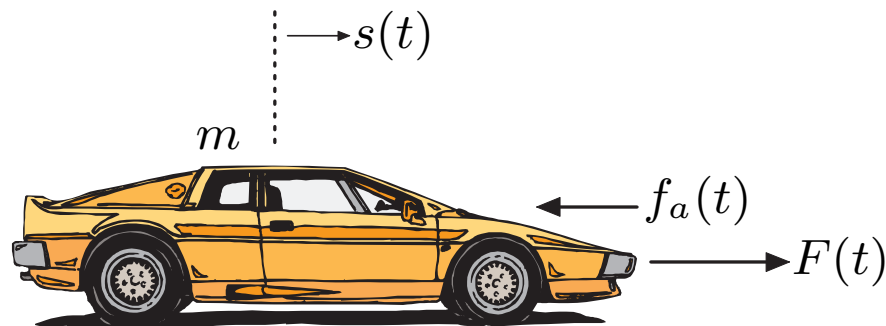
$$P_d = \frac{dE_d}{dt} = \beta \dot{s}^2(t) = \beta v^2(t).$$

La relazione forza-velocità è lineare solo per velocità non troppo elevate (*attrito viscoso*).

Per velocità elevate tale relazione diventa non lineare (*attrito idraulico*), ad esempio:

$$F = \beta \dot{s}^2 \operatorname{sgn}(\dot{s}), \quad F = \beta (\dot{s}_2 - \dot{s}_1)^2 \operatorname{sgn}(\dot{s}_2 - \dot{s}_1).$$

Relazioni analoghe valgono per la resistenza di attrito alla quale è soggetto un corpo che si muove entro un fluido (aria, acqua, etc.). L'espressione è lineare solo per basse velocità. In generale:



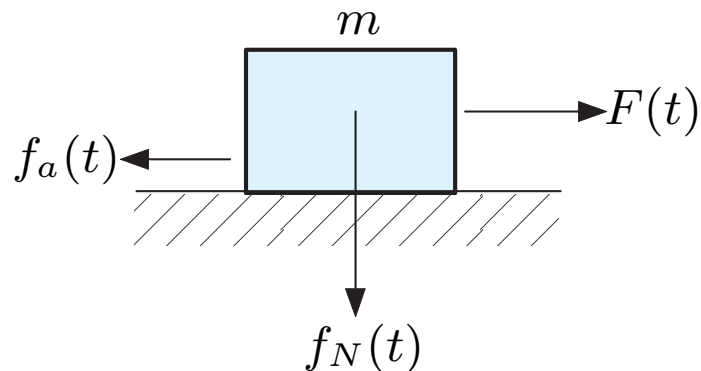
$$m \ddot{s}(t) = F(t) - f_a(t)$$

$$f_a(t) = \frac{1}{2} \rho C_d A_i \dot{s}^2(t) \operatorname{sgn}(\dot{s}(t))$$

dove ρ è la densità del fluido, C_d il coefficiente di resistenza aerodinamica ed A_i l'area investita.

Attrito radente (di scivolamento).

Si ha quando due corpi a contatto sono in moto relativo.



$F(t)$: forza motrice

$f_a(t)$: forza di attrito radente (si oppone al movimento)

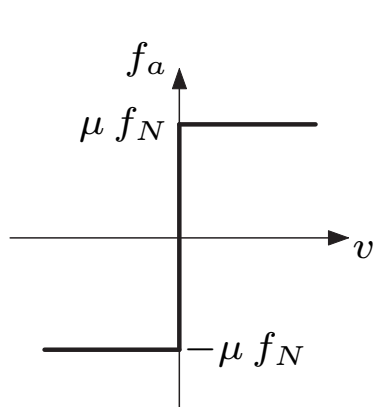
$f_N(t)$: forza normale al piano di contatto tra i corpi (spesso è la forza peso mg)

Il modello più utilizzato è quello dell'*attrito secco* o *coulombiano*:

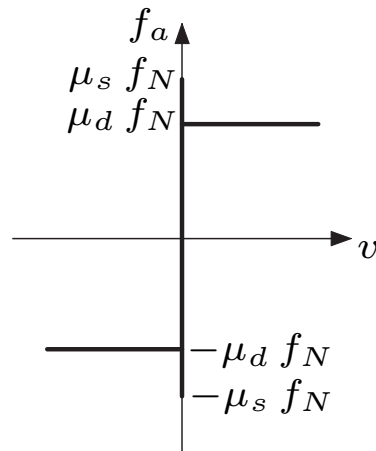
$$f_a(t) = \mu f_N(t) \operatorname{sgn}(v(t)),$$

dove μ è il coefficiente di attrito radente e $v(t)$ la velocità del corpo.

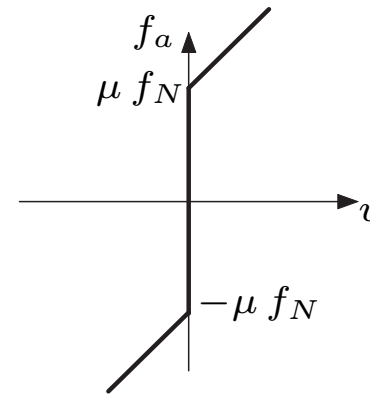
- In generale la forza necessaria per mettere in moto un corpo è superiore a quella richiesta per mantenerlo in moto \implies distinzione tra *attrito statico* o di primo distacco (coefficiente μ_s) ed *attrito dinamico* (coefficiente μ_d).
- Per mettere in moto un corpo F deve superare un certo valore: f_a è presente anche in assenza di moto e si oppone ad $F \implies$ attenzione al caso $v = 0$.



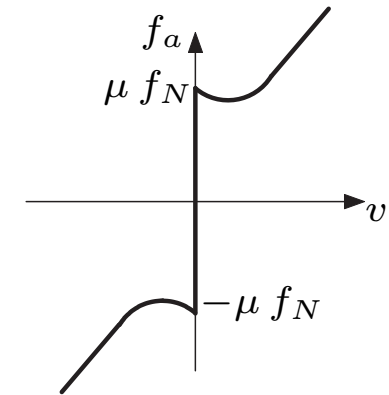
(a): secco



(b): secco + statico



(c): secco + viscoso



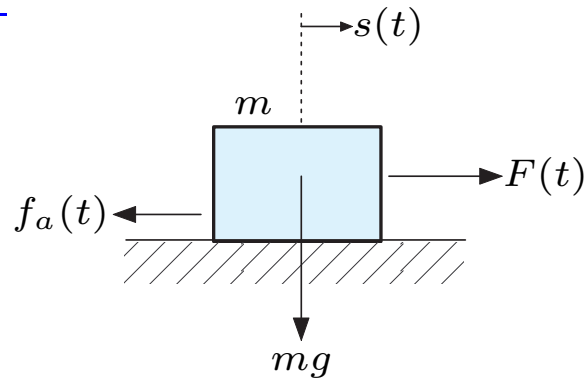
(d): effetto Stribeck

Cosa accade per $v = 0$? Occorre tenere conto anche della forza motrice. Ad esempio, un modello che estende i casi (a) e (b) è il seguente *modello di Karnopp*:

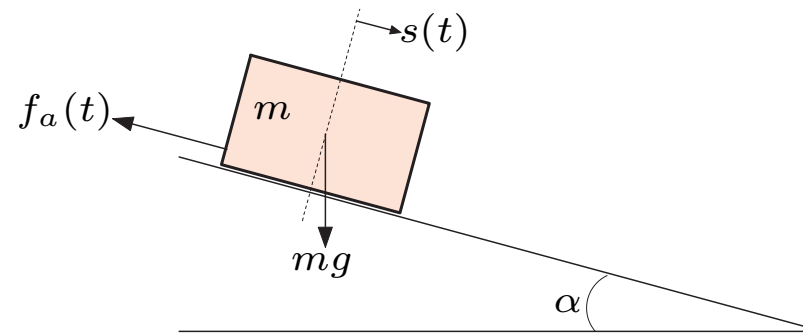
$$(a) \quad f_a = \begin{cases} F & \text{se } v = 0 \text{ e } |F| \leq \mu f_N \\ \mu f_N \operatorname{sgn}(F) & \text{se } v = 0 \text{ e } |F| > \mu f_N \\ \mu f_N \operatorname{sgn}(v) & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$(b) \quad f_a = \begin{cases} F & \text{se } v = 0 \text{ e } |F| \leq \mu_s f_N \\ \mu_d f_N \operatorname{sgn}(F) & \text{se } v = 0 \text{ e } |F| > \mu_s f_N \\ \mu_d f_N \operatorname{sgn}(v) & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Esempi.

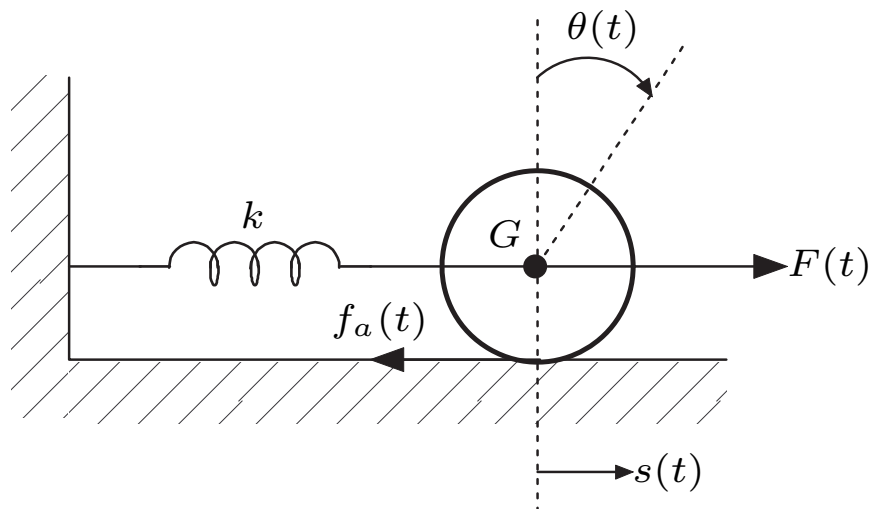


$$m \ddot{s} = F - \mu m g \operatorname{sgn}(\dot{s})$$



$$m \ddot{s} = m g \sin \alpha - \mu m g \cos \alpha$$

Attrito volvente (di rotolamento).

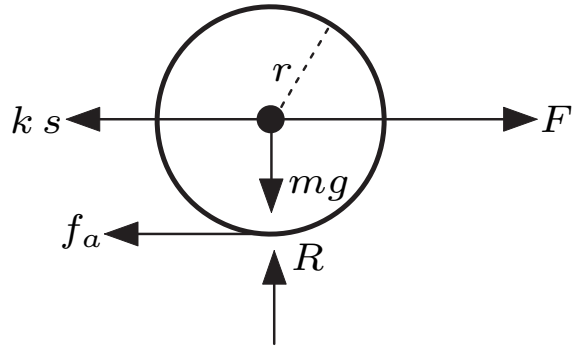


Disco di massa m e raggio r

Disco sottile: spessore $\ll r$

$$J_G = \frac{m r^2}{2}$$

Attrito radente: μ_s, μ_d



$$m \ddot{s} = F - k s - f_a$$

$$J_G \ddot{\theta} = f_a r$$

Se $F < \mu_s mg$ il disco inizia a rotolare senza strisciare, ovvero il moto è di *puro rotolamento*:

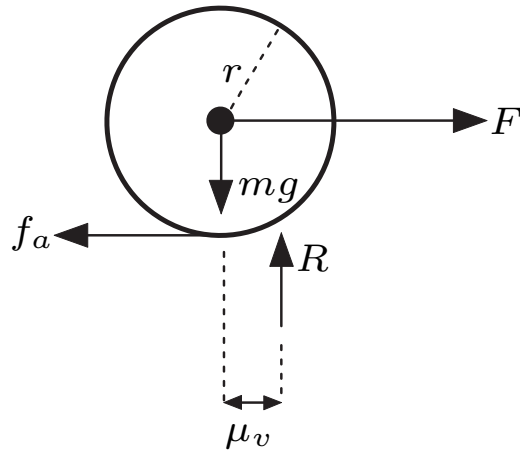
$$s(t) = r \theta(t)$$

\implies il modello è di ordine 2 $\implies (s, \dot{s})$ oppure $(\theta, \dot{\theta})$

$$\underbrace{\left(m + \frac{J_G}{r^2}\right)}_{m_{eq}} \ddot{s} = F - k s \quad \text{oppure} \quad \underbrace{\left(J_G + m r^2\right)}_{J_{eq}} \ddot{\theta} = F r - \underbrace{k r^2}_{k_{eq}} \theta$$

- Durante il moto la condizione di puro rotolamento si mantiene se $f_a(t) < \mu_s mg$.
- Se tale condizione non è verificata si ha rotolamento + strisciamento \implies il modello diventa di ordine 4 ed entrambe le equazioni di Newton vanno considerate con $f_a = \mu_d mg \operatorname{sgn}(\dot{s})$.

In condizioni di puro rotolamento il sistema è dunque del tipo massa–molla ed oscilla indefinitamente \implies in realtà è presente una coppia che si oppone al rotolamento \implies *attrito volvente*. Considerando assente la molla si ha:



$$m \ddot{s} = F - f_a$$

$$J_G \ddot{\theta} = f_a r - \mu_v mg$$

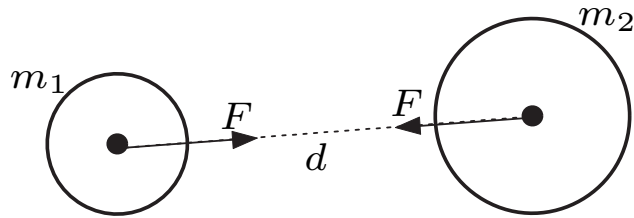
$$\left(m + \frac{J_G}{r^2}\right) \ddot{s} = F - \frac{\mu_v}{r} mg \operatorname{sgn}(\dot{s})$$

In generale, se la componente normale è $f_N(t)$, il disco può rotolare solo se $F r > \mu_v f_N$. Alcuni casi possibili:

- (a) $F < \mu_s f_N$ e $F > \frac{\mu_v}{r} f_N \implies$ puro rotolamento
- (b) $F \geq \mu_s f_N$ e $F > \frac{\mu_v}{r} f_N \implies$ rotolamento + strisciamento
- (c) $F \geq \mu_s f_N$ e $F \leq \frac{\mu_v}{r} f_N \implies$ strisciamento

In generale μ_d/μ_v è dell'ordine di 10^2 .

Legge di gravitazione universale



$$F = -\Gamma \frac{m_1 m_2}{d^2}$$

Γ : costante di gravitazione universale

d : distanza tra i baricentri

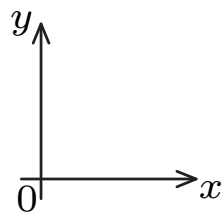
Sulla terra, un corpo di massa m è soggetto alla forza peso (applicata al baricentro)

$$f_P = m g.$$

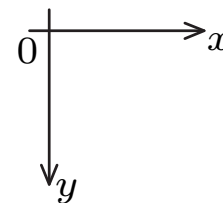
Ad essa è associata *l'energia potenziale gravitazionale*, data dall'opposto del lavoro della forza peso per spostare il corpo dalla quota 0 (origine del riferimento prescelto) alla quota h :

$$E_p = m g h.$$

Se in un sistema di riferimento la direzione verticale è scelta positiva verso il basso, occorre cambiare il segno a E_p :



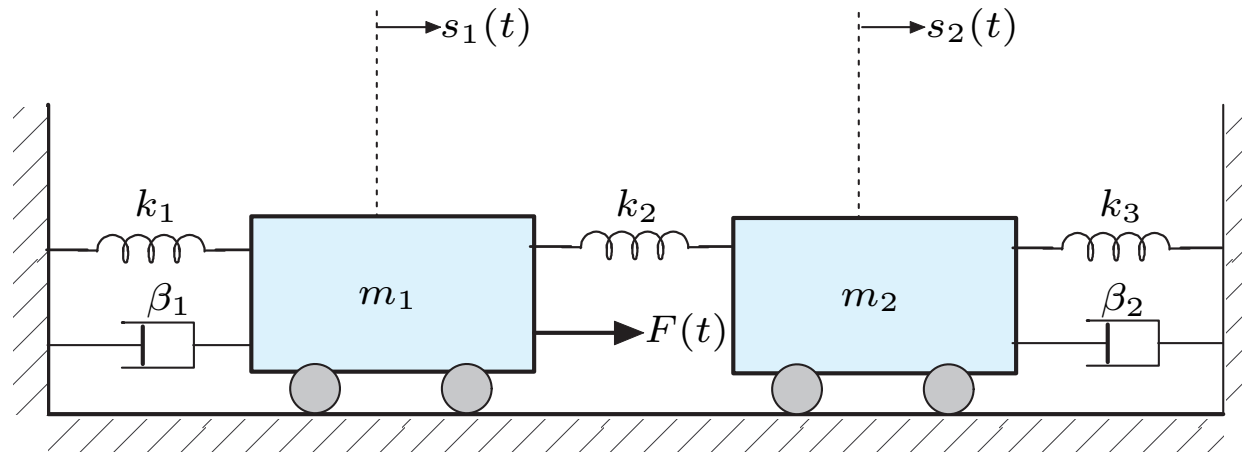
$$\implies E_p = m g y$$



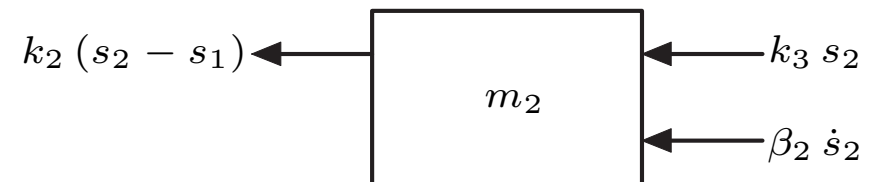
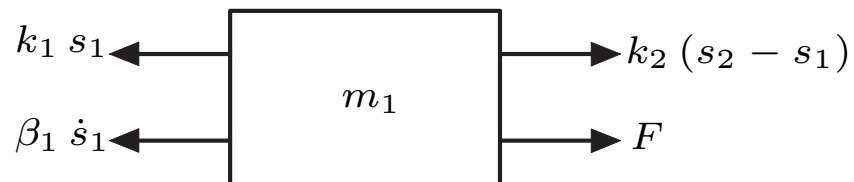
$$\implies E_p = -m g y$$

Modellistica di sistemi meccanici con i diagrammi di corpo libero

Esempio 1.



Diagrammi di corpo libero:



$$m_1 \ddot{s}_1 = F + k_2 (s_2 - s_1) - k_1 s_1 - \beta_1 \dot{s}_1$$

$$m_2 \ddot{s}_2 = -k_2 (s_2 - s_1) - k_3 s_2 - \beta_2 \dot{s}_2$$

$$\ddot{s}_1 = -\frac{(k_1 + k_2)}{m_1} s_1 + \frac{k_2}{m_1} s_2 - \frac{\beta_1}{m_1} \dot{s}_1 + \frac{F}{m_1}$$

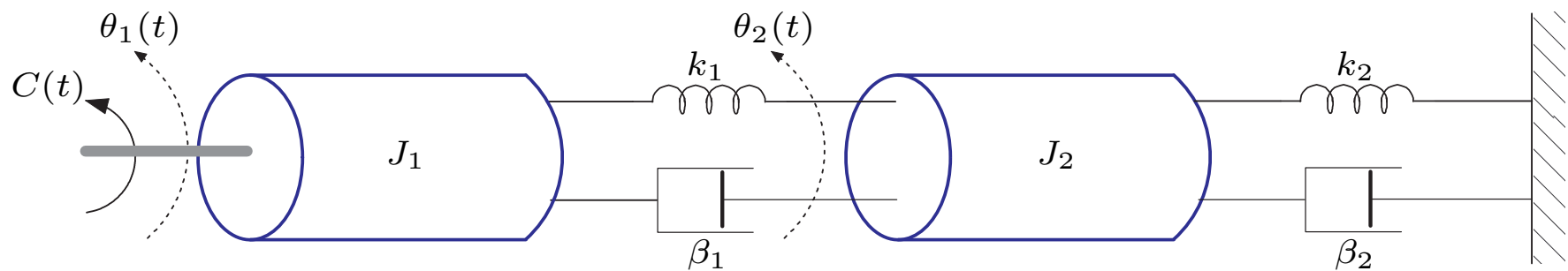
$$\ddot{s}_2 = \frac{k_2}{m_2} s_1 - \frac{(k_2 + k_3)}{m_2} s_2 - \frac{\beta_2}{m_2} \dot{s}_2$$

$$x_1 = s_1, \quad x_2 = \dot{s}_1, \quad x_3 = s_2, \quad x_4 = \dot{s}_2, \quad u = F, \quad y_1 = s_1, \quad y_2 = s_2$$

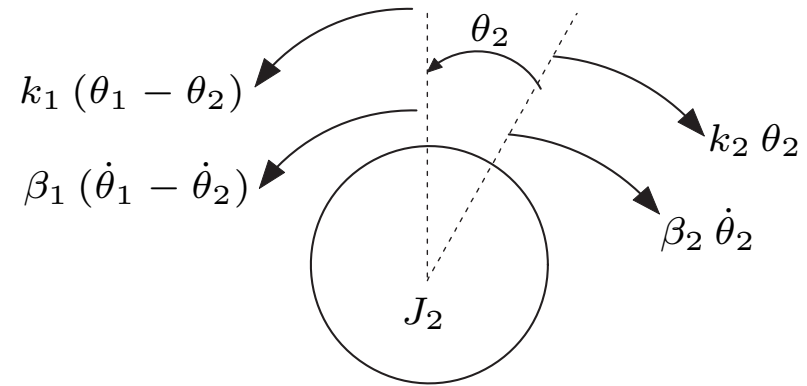
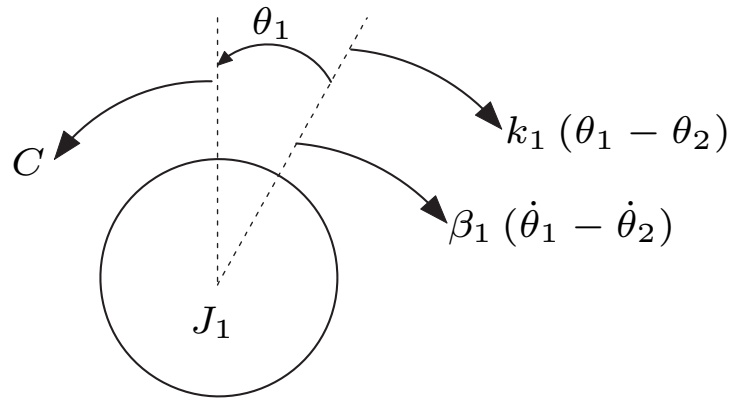
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{(k_1+k_2)}{m_1} & -\frac{\beta_1}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_2}{m_2} & 0 & -\frac{(k_2+k_3)}{m_2} & -\frac{\beta_2}{m_2} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Esempio 2.



Diagrammi di corpo libero:



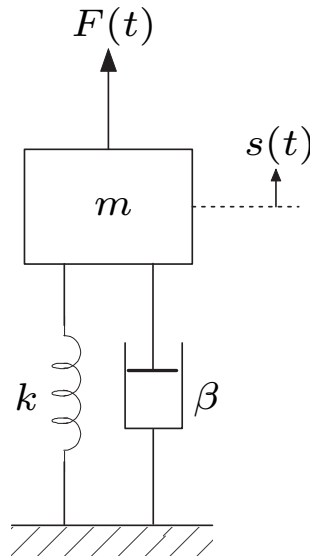
$$J_1 \ddot{\theta}_1 = C - k_1 (\theta_1 - \theta_2) - \beta_1 (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2)$$

$$J_2 \ddot{\theta}_2 = k_1 (\theta_1 - \theta_2) + \beta_1 (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) - k_2 \theta_2 - \beta_2 \dot{\theta}_2$$

$$x_1 = \theta_1, \quad x_2 = \dot{\theta}_1, \quad x_3 = \theta_2, \quad x_4 = \dot{\theta}_2, \quad u = C, \quad y_1 = \theta_1, \quad y_2 = \theta_2$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k_1}{J_1} & -\frac{\beta_1}{J_1} & \frac{k_1}{J_1} & \frac{\beta_1}{J_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_1}{J_2} & \frac{\beta_1}{J_2} & -\frac{(k_1+k_2)}{J_2} & -\frac{(\beta_1+\beta_2)}{J_2} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Esempio 3.

$$m \ddot{s} = F - k s - \beta \dot{s} - mg$$

La forza peso (o l'accelerazione di gravità) è una variabile di ingresso.

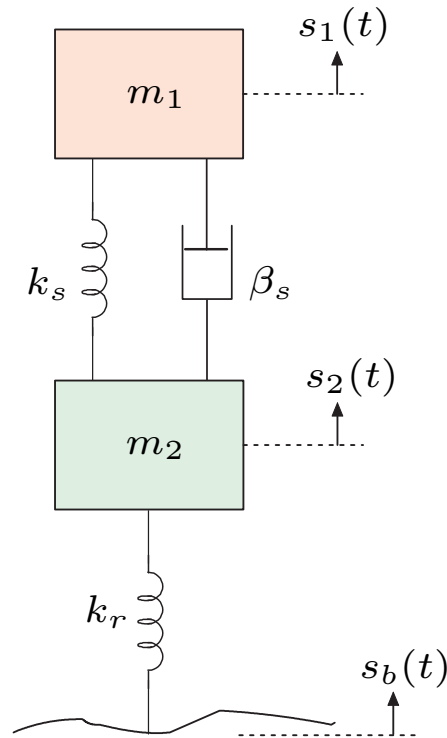
Stato di equilibrio con $F = 0$: $\bar{s} = -\frac{mg}{k}$

$$\Delta s = s - \bar{s} \implies m \Delta \ddot{s} = F - k \Delta s - \beta \Delta \dot{s}$$

Nei sistemi che si muovono anche in direzione verticale si possono scrivere le equazioni del moto senza considerare le forze peso se:

1. le coordinate di posizione sono definite rispetto alla posizione di equilibrio che risulta quando agisce la gravità;
2. le forze elastiche considerate consistono nella perturbazione delle forze rispetto a quelle che agiscono all'equilibrio.

Esempio 4: modello “quarter car” della sospensione di un veicolo



m_1 : massa quarto di auto

m_2 : massa ruota ed organi meccanici collegati

k_s, β_s : parametri sospensione

k_r : rigidezza ruota

$s_1(t), s_2(t)$: spostamenti rispetto a posizione di equilibrio

$s_b(t)$: entità delle asperità del fondo stradale (spostamento battistrada)

$$m_1 \ddot{s}_1 = -k_s (s_1 - s_2) - \beta_s (\dot{s}_1 - \dot{s}_2)$$

$$m_2 \ddot{s}_2 = k_s (s_1 - s_2) + \beta_s (\dot{s}_1 - \dot{s}_2) - k_r (s_2 - s_b)$$

$$x_1 = s_1 \quad x_2 = \dot{s}_1 \quad x_3 = s_2 \quad x_4 = \dot{s}_2 \quad u = s_b$$



$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k_s}{m_1} & -\frac{\beta_s}{m_1} & \frac{k_s}{m_1} & \frac{\beta_s}{m_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_s}{m_2} & \frac{\beta_s}{m_2} & -\frac{(k_s+k_r)}{m_2} & -\frac{\beta_s}{m_2} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{k_r}{m_2} \end{bmatrix}$$

Se lo smorzamento dello pneumatico non è trascurabile:

$$m_1 \ddot{s}_1 = -k_s (s_1 - s_2) - \beta_s (\dot{s}_1 - \dot{s}_2)$$

$$m_2 \ddot{s}_2 = k_s (s_1 - s_2) + \beta_s (\dot{s}_1 - \dot{s}_2) - k_r (s_2 - s_b) - \beta_r (\dot{s}_2 - \dot{s}_b)$$

$$x_1 = s_1 - s_2 \quad x_2 = \dot{s}_1 \quad x_3 = s_2 - s_b \quad x_4 = \dot{s}_2 \quad u = \dot{s}_b$$

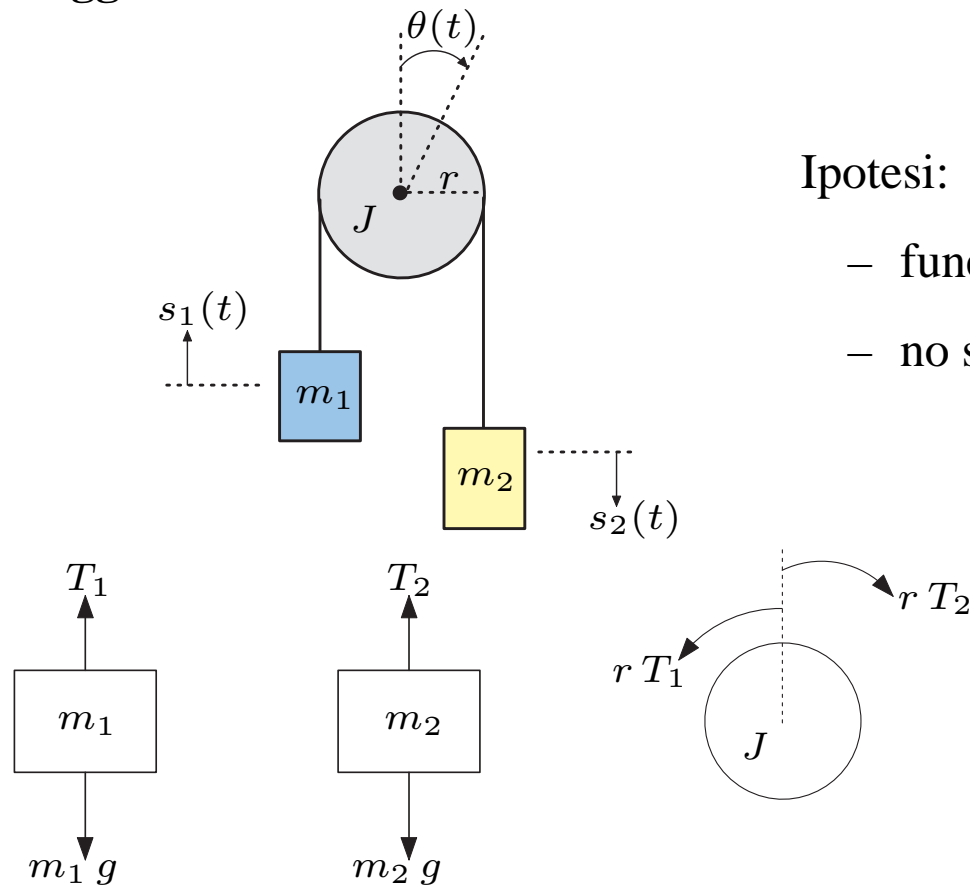


$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -\frac{k_s}{m_1} & -\frac{\beta_s}{m_1} & 0 & \frac{\beta_s}{m_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_s}{m_2} & \frac{\beta_s}{m_2} & -\frac{k_r}{m_2} & -\frac{(\beta_s+\beta_r)}{m_2} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ \frac{\beta_r}{m_2} \end{bmatrix}$$

Trasformatori meccanici

Trasformano moti, forze o coppie in ingresso in altri moti, forze o coppie in uscita: riduttori, cinghie, leve, pulegge, etc. Ad esempio un riduttore normalmente riduce la velocità angolare ed incrementa la coppia, un sistema pignone–cremagliera trasforma un moto rotatorio in moto traslatorio, una leva incrementa la forza applicata.

Fune–puleggia



Ipotesi:

- fune priva di massa e inestensibile
- no strisciamento

$$m_1 \ddot{s}_1 = T_1 - m_1 g$$

$$m_2 \ddot{s}_2 = -T_2 + m_2 g$$

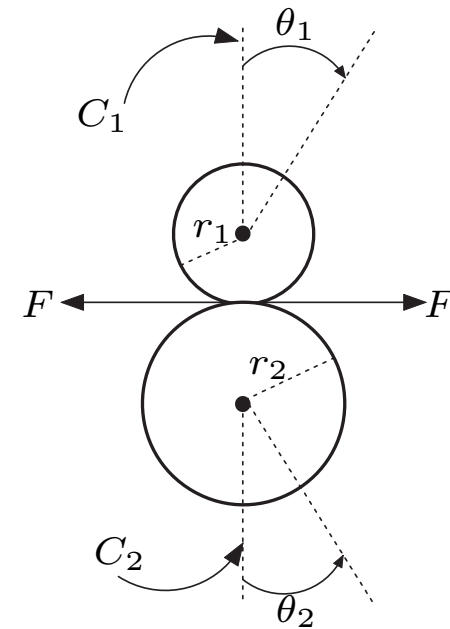
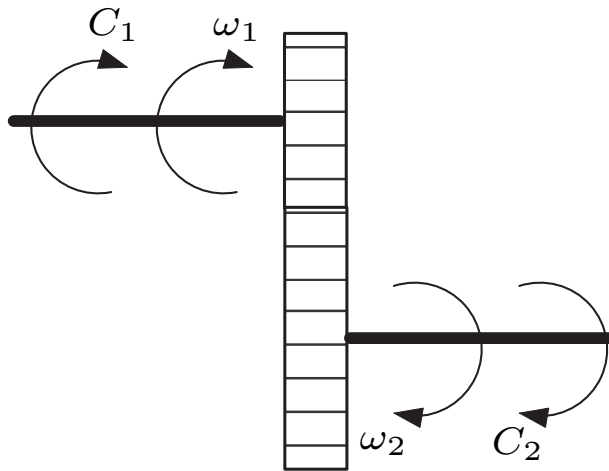
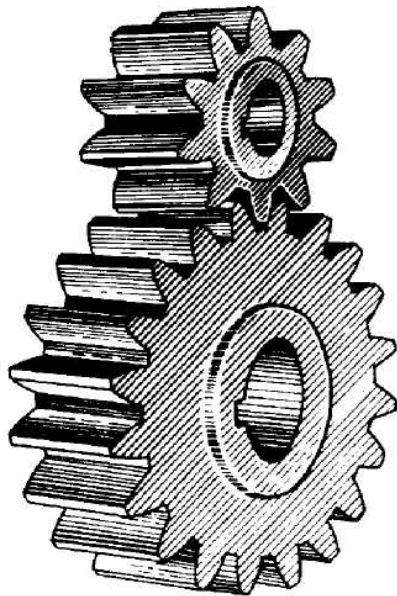
$$J \ddot{\theta} = r T_2 - r T_1$$

In base alle ipotesi: $s_1 = s_2 = r \theta \implies$ un grado di libertà (modello di ordine 2)

Scegliendo s_1 si ottiene:

$$\left(m_1 + m_2 + \frac{J}{r^2} \right) \ddot{s}_1 = (m_2 - m_1) g$$

Riduttori



Rapporto di riduzione:

$$\eta = \frac{r_1}{r_2}$$

Puro rotolamento: $r_1 \theta_1 = r_2 \theta_2 \Rightarrow \theta_2 = \eta \theta_1 \Rightarrow \omega_2 = \eta \omega_1$ ($\omega_1 = \dot{\theta}_1, \omega_2 = \dot{\theta}_2$)

Caso ideale: ruote prive di massa, no attriti $\Rightarrow C_1 \omega_1 = C_2 \omega_2 \Rightarrow C_2 = \frac{C_1}{\eta}$

Se le ruote hanno momenti di inerzia J_1, J_2 :

$$J_1 \ddot{\theta}_1 = C_1 - F r_1$$

$$J_2 \ddot{\theta}_2 = F r_2$$

Come modello finale si può utilizzare l'equazione della ruota motrice:

$$(J_1 + \eta^2 J_2) \ddot{\theta}_1 = C_1$$

o quella della ruota condotta

$$(J_2 + \frac{J_1}{\eta^2}) \ddot{\theta}_2 = \frac{C_1}{\eta}$$

Se viene collegato un carico a valle la coppia utile per muoverlo diventa: $C_2 = \frac{C_1}{\eta} - (J_2 + \frac{J_1}{\eta^2}) \ddot{\theta}_2$.

Se vi sono attriti a monte e a valle (β_1, β_2):

$$J_1 \ddot{\theta}_1 = C_1 - \beta_1 \dot{\theta}_1 - F r_1$$

$$J_2 \ddot{\theta}_2 = F r_2 - \beta_2 \dot{\theta}_2$$

Seguendo gli stessi ragionamenti del caso precedente si ha:

$$(J_1 + \eta^2 J_2) \ddot{\theta}_1 = C_1 - (\beta_1 + \eta^2 \beta_2) \dot{\theta}_1$$

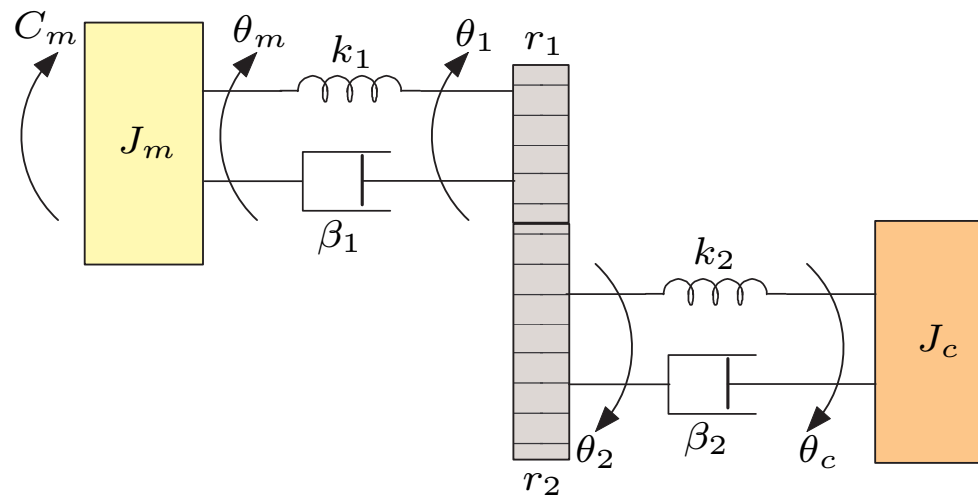
o quella della ruota condotta

$$(J_2 + \frac{J_1}{\eta^2}) \ddot{\theta}_2 = \frac{C_1}{\eta} - (\beta_2 + \frac{\beta_1}{\eta^2}) \dot{\theta}_2.$$

Se vi sono elasticità o molle torsionali valgono per le rigidzze le stesse regole viste per i momenti di inerzia e i coefficienti di attrito:

$$J, \beta, k \xrightarrow{\text{a monte}} \eta^2 J, \eta^2 \beta, \eta^2 k \qquad J, \beta, k \xrightarrow{\text{a valle}} \frac{J}{\eta^2}, \frac{\beta}{\eta^2}, \frac{k}{\eta^2}$$

Esempio: accoppiamento tra albero–motore e carico



$$J_m \ddot{\theta}_m = C_m - k_1 (\theta_m - \theta_1) - \beta_1 (\dot{\theta}_m - \dot{\theta}_1) \quad (1)$$

$$J_1 \ddot{\theta}_1 = k_1 (\theta_m - \theta_1) + \beta_1 (\dot{\theta}_m - \dot{\theta}_1) - F r_1 \quad (2)$$

$$J_2 \ddot{\theta}_2 = F r_2 - k_2 (\theta_2 - \theta_c) - \beta_2 (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_c) \quad (3)$$

$$J_c \ddot{\theta}_c = k_2 (\theta_2 - \theta_c) + \beta_2 (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_c) \quad (4)$$

Poiché $\theta_2 = \eta \theta_1$ occorre eliminare l'equazione (2) oppure l'equazione (3). Nel primo caso il modello definitivo è

$$J_m \ddot{\theta}_m = C_m - k_1 \left(\theta_m - \frac{\theta_2}{\eta} \right) - \beta_1 \left(\dot{\theta}_m - \frac{\dot{\theta}_2}{\eta} \right)$$

$$\left(J_2 + \frac{J_1}{\eta^2} \right) \ddot{\theta}_2 = \frac{k_1}{\eta} \theta_m + \frac{\beta_1}{\eta} \dot{\theta}_m - \left(\frac{k_1}{\eta^2} + k_2 \right) \theta_2 - \left(\frac{\beta_1}{\eta^2} + \beta_2 \right) \dot{\theta}_2 + k_2 \theta_c + \beta_2 \dot{\theta}_c$$

$$J_c \ddot{\theta}_c = k_2 (\theta_2 - \theta_c) + \beta_2 (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_c)$$

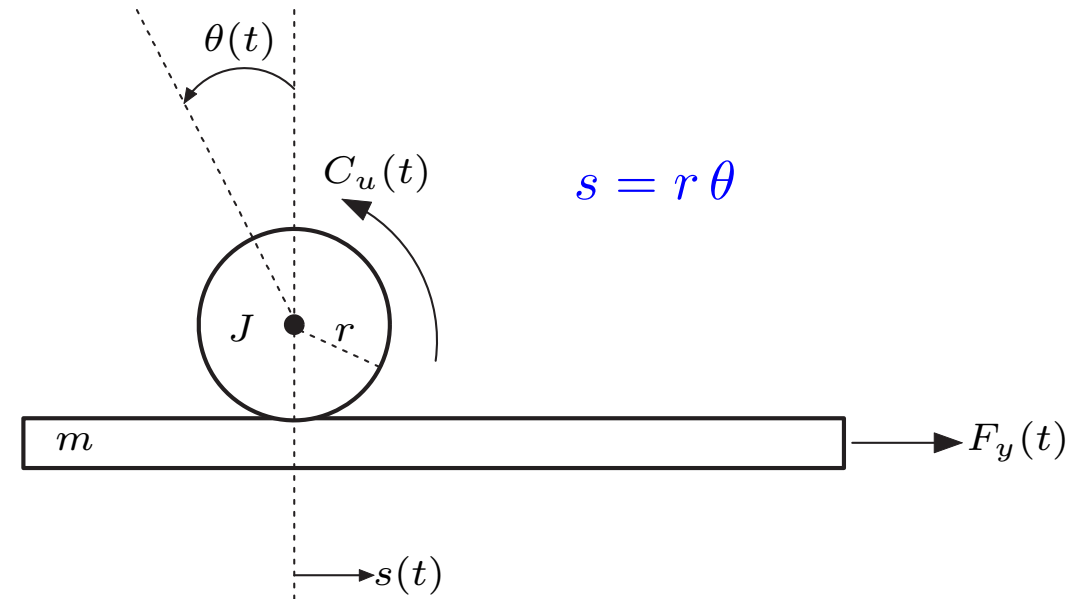
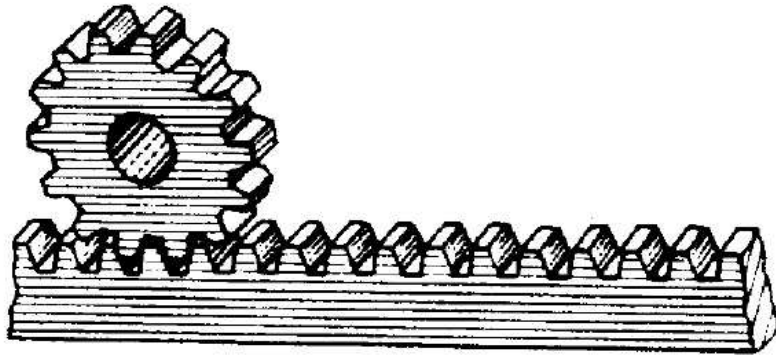
mentre nel secondo diventa

$$J_m \ddot{\theta}_m = C_m - k_1 (\theta_m - \theta_1) - \beta_1 (\dot{\theta}_m - \dot{\theta}_1)$$

$$(J_1 + \eta^2 J_2) \ddot{\theta}_1 = k_1 \theta_m + \beta_1 \dot{\theta}_m - (k_1 + \eta^2 k_2) \theta_1 - (\beta_1 + \eta^2 \beta_2) \dot{\theta}_1 + k_2 \eta \theta_c + \beta_2 \eta \dot{\theta}_c$$

$$J_c \ddot{\theta}_c = k_2 (\eta \theta_1 - \theta_c) + \beta_2 (\eta \dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_c)$$

Pignone-cremagliera

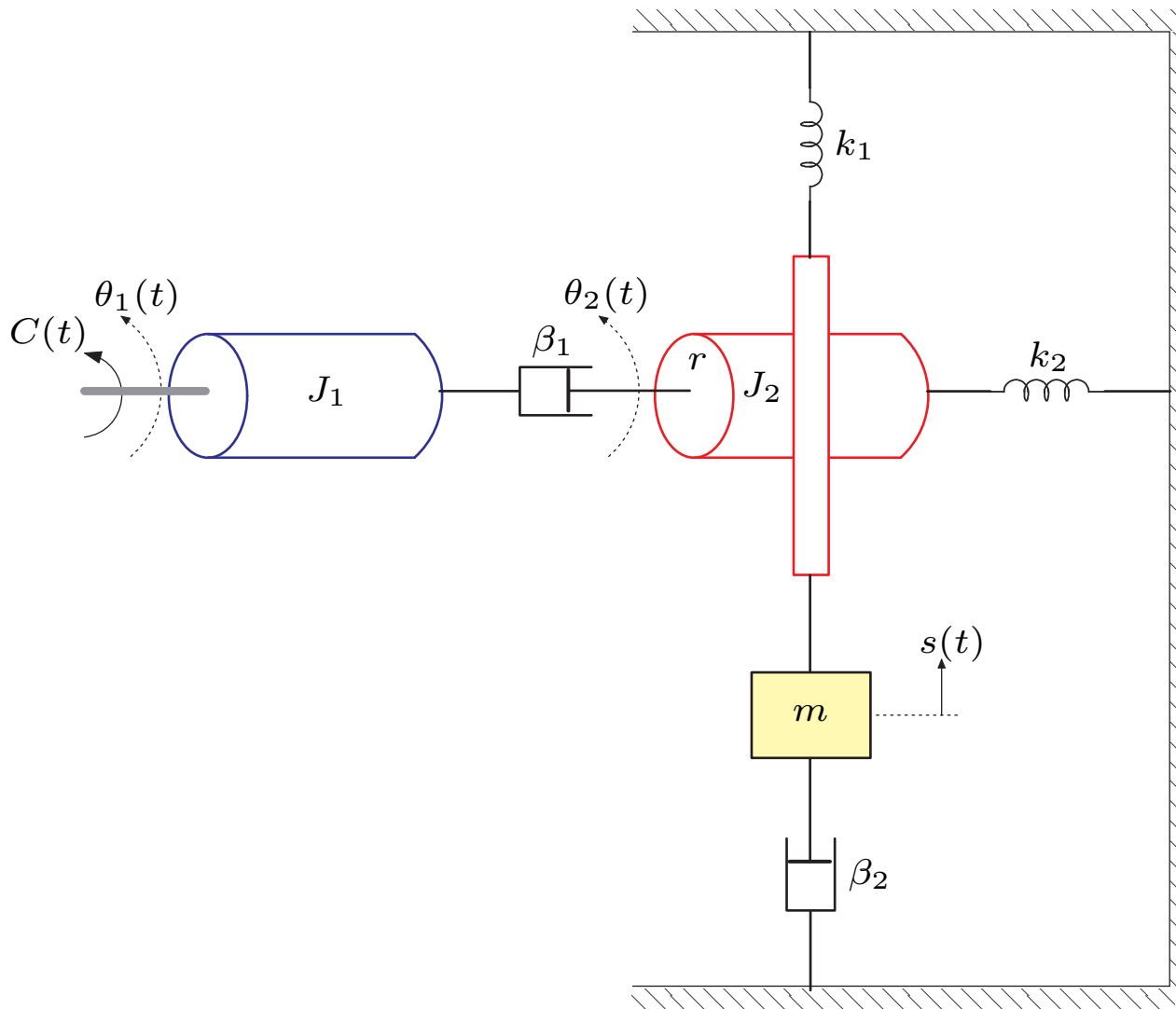


Nel caso ideale si ha $F_y = \frac{C_u}{r}$, in quello reale:

$$\begin{aligned} J \ddot{\theta} &= C_u - F r \\ m \ddot{s} &= F \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} (J + m r^2) \ddot{\theta} = C_u & \text{a monte} \\ (m + \frac{J}{r^2}) \ddot{s} = \frac{C_u}{r} & \text{a valle} \end{cases}$$

- Tutti le considerazioni fatte per il riduttore si mantengono valide (attriti equivalenti, rigidzze equivalenti) sostituendo il rapporto di riduzione η con il raggio del pignone r .

Esempio: sollevamento carichi



m : massa cremagliera + carico

$$u_1 = C \quad u_2 = mg \quad y_1 = s \quad y_2 = \dot{s}$$

$$s = r \theta_2$$

$\theta_1 = \theta_2 = 0, s = 0 \Rightarrow$ molle a riposo

Variabili di stato: $\theta_1(t), \dot{\theta}_1(t), \theta_2(t), \dot{\theta}_2(t)$ oppure $\theta_1(t), \dot{\theta}_1(t), s(t), \dot{s}(t)$

$$J_1 \ddot{\theta}_1 = C - \beta_1 (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) \quad (5)$$

$$J_2 \ddot{\theta}_2 = \beta_1 (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) - k_2 \theta_2 - F r \quad (6)$$

$$m \ddot{s} = F - k_1 s - \beta_2 \dot{s} - mg \quad (7)$$

Scelta 1: (5) + (6) modificata

$$J_1 \ddot{\theta}_1 = C - \beta_1 (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2)$$

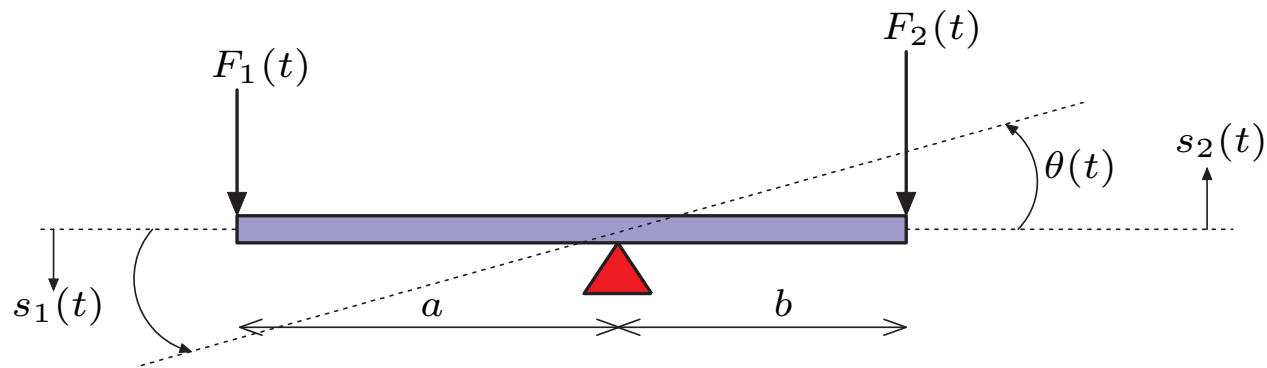
$$(J_2 + m r^2) \ddot{\theta}_2 = \beta_1 \dot{\theta}_1 - (k_2 + k_1 r^2) \theta_2 - (\beta_1 + \beta_2 r^2) \dot{\theta}_2 - mg r$$

Scelta 2: (5) modificata + (7) modificata

$$J_1 \ddot{\theta}_1 = C - \beta_1 \left(\dot{\theta}_1 - \frac{\dot{s}}{r} \right)$$

$$\left(m + \frac{J_2}{r^2} \right) \ddot{s} = \frac{\beta_1}{r} \dot{\theta}_1 - \left(k_1 + \frac{k_2}{r^2} \right) s - \left(\beta_2 + \frac{\beta_1}{r^2} \right) \dot{s} - mg$$

Leva



Leva ideale: massa trascurabile, no attriti

$$F_1 a - F_2 b = 0 \quad \Longrightarrow \quad F_2 = \frac{a}{b} F_1$$

Leva reale:

$$J \ddot{\theta} = F_1 a - F_2 b - \beta \dot{\theta}$$

Si ha inoltre:

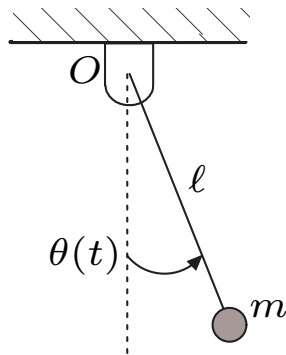
$$s_1 \approx a \theta, s_2 \approx b \theta \quad \Longrightarrow \quad s_2 = \frac{b}{a} s_1$$

\Rightarrow un solo grado di libertà (s_1 , s_2 oppure θ).

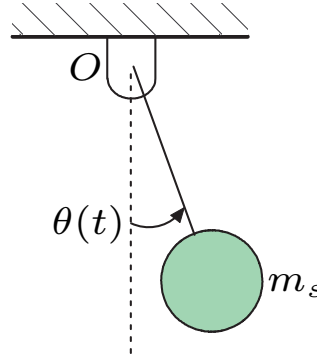
Il rapporto $\frac{a}{b}$ è detto *vantaggio meccanico* della leva.

Modellistica di sistemi meccanici: altri esempi

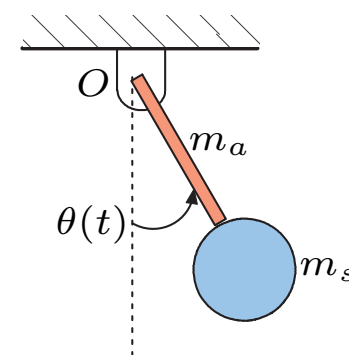
Esempio 1: pendolo semplice e pendolo fisico (vedi slide 5)



(a)



(b)



(c)

Ipotesi: ai pendoli è applicata una coppia $C(t)$ in O ed è presente una coppia dovuta all'attrito viscoso (coefficiente β).

In tutti e tre i casi l'equazione del moto è del tipo

$$J_O \ddot{\theta} = C(t) - \beta \dot{\theta} - mg L \sin \theta$$

L è la distanza del baricentro del pendolo (punto di applicazione della forza peso) da O

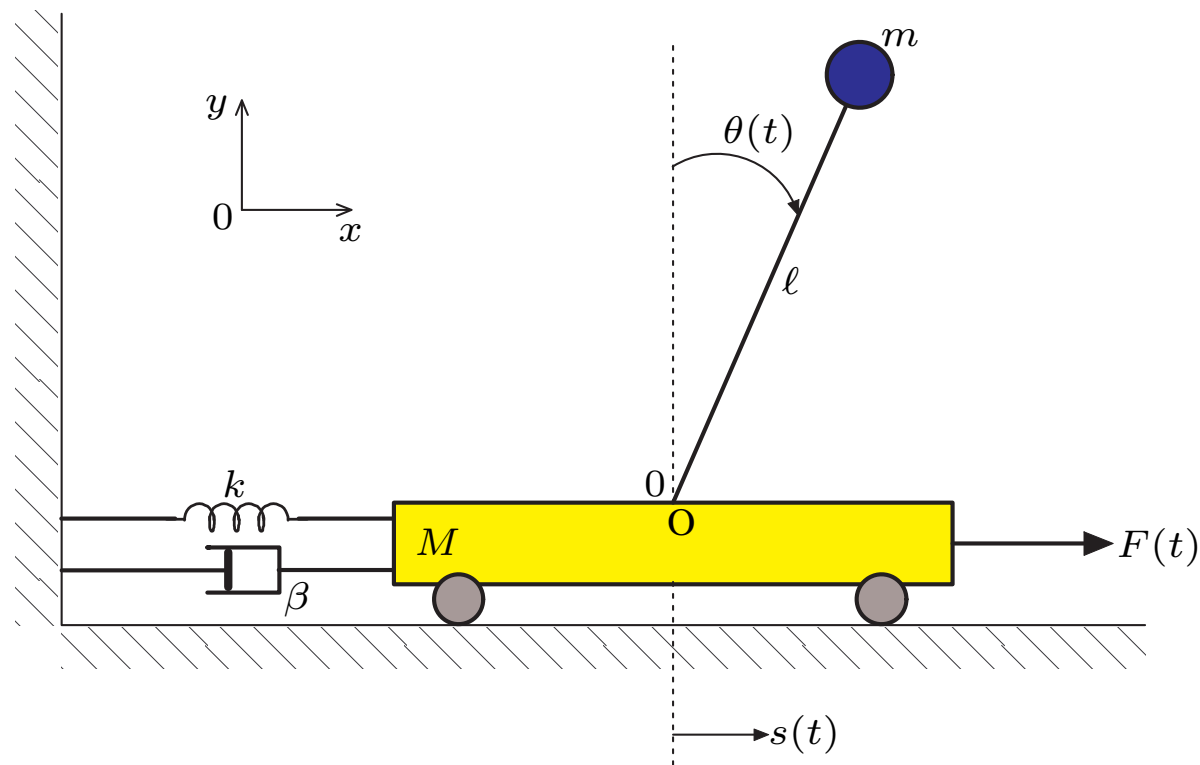
(a): $L = \ell$ (lunghezza asta)

(b): $L = \ell_s$ (distanza tra O e baricentro sfera)

(c): se la massa totale m fosse concentrata nel baricentro la forza peso produrrebbe lo stesso momento rispetto al punto O

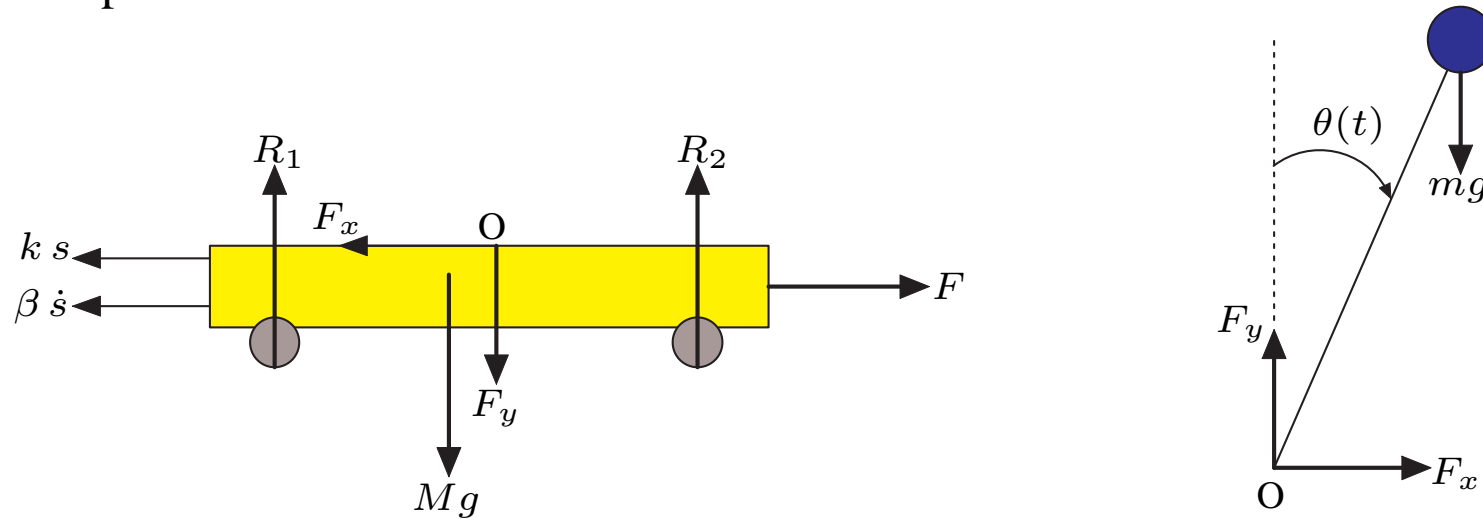
$$mgL = m_s g l_s + m_a g \frac{\ell_a}{2} \implies L = \frac{m_s l_s + m_a (\ell_a/2)}{m_s + m_a}$$

Esempio 2: pendolo semplice inverso su carrello



Ipotesi: la massa m è puntiforme, il carrello rimane sempre appoggiato al suolo, no attrito tra ruote e suolo

Diagrammi di corpo libero:



Posizioni e velocità dei baricentri

$$G_M = (s, 0), \quad G_m = (s + l \sin \theta, l \cos \theta) \quad \Longrightarrow \quad \vec{v}_M = (\dot{s}, 0) \quad \vec{v}_m = (\dot{s} + l \dot{\theta} \cos \theta, -l \dot{\theta} \sin \theta)$$

Equazione del carrello lungo x :

$$M a_{M_x} = M \ddot{s} = F - k s - \beta \dot{s} - F_x \quad (8)$$

Equazione del pendolo lungo x :

$$m a_{m_x} = m (\ddot{s} + l \ddot{\theta} \cos \theta - l \dot{\theta}^2 \sin \theta) = F_x \quad (9)$$

Eliminando la reazione vincolare F_x ottengo la prima equazione del moto:

$$(M + m) \ddot{s} + m \ell \ddot{\theta} \cos \theta = m \ell \dot{\theta}^2 \sin \theta - k s - \beta \dot{s} + F$$

Equazione del pendolo lungo y :

$$m a_{m_y} = m (-\ell \ddot{\theta} \sin \theta - \ell \dot{\theta}^2 \cos \theta) = F_y - mg \quad (10)$$

Equazione dei momenti rispetto al baricentro del pendolo (coincidente con m):

$$-F_x \cos \theta \ell + F_y \sin \theta \ell = 0$$

Sostituendo F_x ed F_y nell'equazione dei momenti ottengo la seconda equazione del moto:

$$\ddot{s} \cos \theta + \ell \ddot{\theta} = g \sin \theta$$

Nota: le reazioni vincolari vanno sempre eliminate per determinare le equazioni del moto

Ponendo:

$$x_1 = s, \quad x_2 = \dot{s}, \quad x_3 = \theta, \quad x_4 = \dot{\theta}, \quad u_1 = F, \quad u_2 = g$$

si ottiene il modello nello spazio degli stati

$$\dot{x}_1 = x_2$$

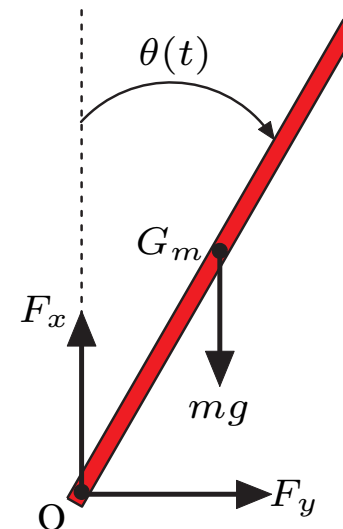
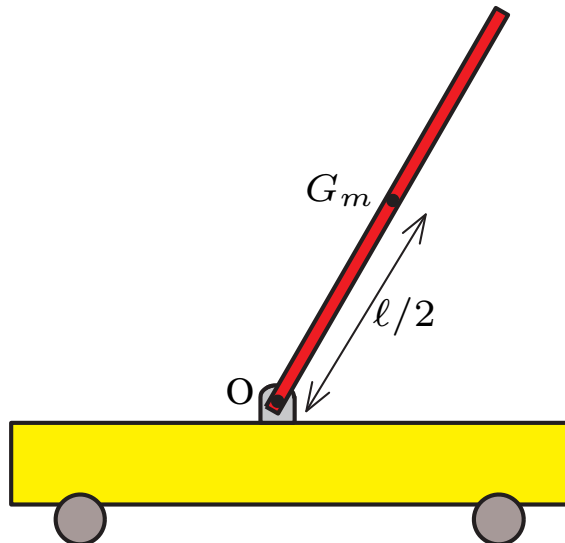
$$(M + m) \dot{x}_2 + m \ell \dot{x}_4 \cos x_3 = m \ell x_4^2 \sin x_3 - k x_1 - \beta x_2 + u_1$$

$$\dot{x}_3 = x_4$$

$$\dot{x}_2 \cos x_3 + \ell \dot{x}_4 = u_2 \sin x_3$$

Nella seconda equazione compare \dot{x}_4 , nella quarta equazione compare $\dot{x}_2 \Rightarrow$ il modello non è definitivo \Rightarrow loop algebrico da risolvere

Esempio 3: pendolo fisico inverso su carrello



In questo caso al carrello è incernierata un'asta di massa m , lunghezza ℓ e momento di inerzia rispetto al baricentro J_G .

Le coordinate del baricentro dell'asta sono: $G_m = (s + \frac{\ell}{2} \sin \theta, \frac{\ell}{2} \cos \theta)$

Equazione del carrello lungo x : vale la (8).

Equazione dell'asta lungo x : sostituire $\frac{\ell}{2}$ ad ℓ nella (9)

Equazione dell'asta lungo y : sostituire $\frac{\ell}{2}$ ad ℓ nella (10)

Equazione dei momenti rispetto al baricentro dell'asta:

$$J_G \ddot{\theta} = -F_x \cos \theta \frac{\ell}{2} + F_y \sin \theta \frac{\ell}{2}$$

Equazioni del moto:

$$(M + m) \ddot{s} + m \frac{\ell}{2} \ddot{\theta} \cos \theta = m \frac{\ell}{2} \dot{\theta}^2 \sin \theta - k s - \beta \dot{s} + F$$
$$m \frac{\ell}{2} \ddot{s} \cos \theta + (J_G + m \frac{\ell^2}{4}) \ddot{\theta} = m g \frac{\ell}{2} \sin \theta$$

Modellistica di sistemi meccanici con le equazioni di Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = Q_i \quad i = 1, \dots, N$$

- N : gradi di libertà del sistema (ordine del sistema: $n = 2N$);
- q_1, q_2, \dots, q_N : coordinate generalizzate o di Lagrange;
- Q_1, Q_2, \dots, Q_N : forze generalizzate o di Lagrange;
- T : energia cinetica del sistema (dovuta a masse e momenti di inerzia);
- U : energia potenziale del sistema (potenziale gravitazionale, potenziale elastico);
- Le variabili di stato del modello sono:

$$x_1 = q_1, \quad x_2 = \dot{q}_1, \quad x_3 = q_2, \quad x_4 = \dot{q}_2, \quad \dots \quad x_{n-1} = q_N, \quad x_n = \dot{q}_N$$

- Le coordinate di Lagrange q_1, q_2, \dots, q_N sono un sottoinsieme di quelle posizionali r_1, r_2, \dots, r_M (spostamenti lineari ed angolari). Tale sottoinsieme è ovviamente costituito da variabili indipendenti in grado di determinare in maniera univoca tutte le coordinate posizionali del sistema:

$$r_i = f(q_1, q_2, \dots, q_N), \quad i = 1, \dots, M. \quad (11)$$

- Può essere comodo determinare le espressioni delle energie cinetica e potenziale prima in coordinate posizionali e successivamente in coordinate lagrangiane utilizzando le (11).
- Per determinare le forze generalizzate Q_1, \dots, Q_N si determina il lavoro virtuale δL delle forze esterne agenti sul sistema prima in coordinate posizionali e poi in coordinate lagrangiane utilizzando le (11):

$$\delta L = \sum F_i \delta r_i = \sum F_i \sum \frac{\partial r_i}{\partial q_k} \delta q_k = \sum Q_k \delta q_k,$$

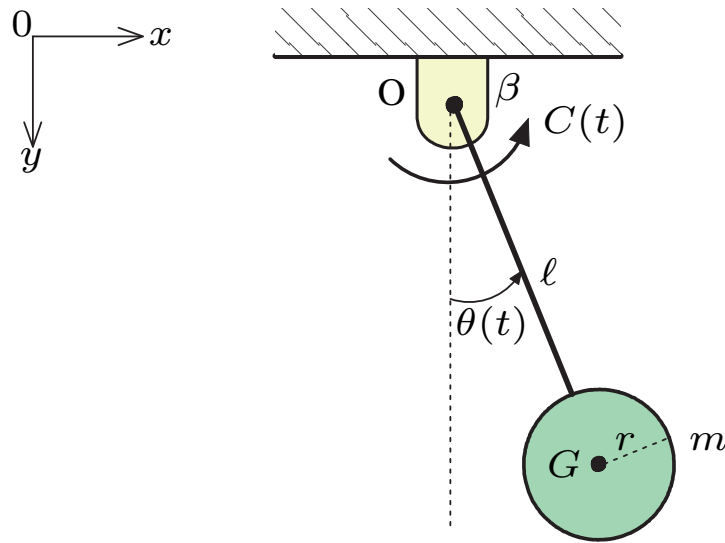
dove δr_i rappresenta uno spostamento virtuale.

- Le forze peso e quelle elastiche non vanno considerate nel calcolo delle forze generalizzate (la loro azione è compresa in U).
- Le forze attrito vanno considerate nel calcolo delle forze generalizzate.

Per il calcolo dell'energia cinetica è utile il seguente teorema.

Teorema (König). L'energia cinetica di un sistema materiale in moto rispetto ad un sistema di riferimento $Oxyz$ è, istante per istante, uguale alla somma dell'energia cinetica che possiederebbe in quell'istante, rispetto a $Oxyz$ il baricentro se in esso fosse concentrata tutta la massa del sistema più l'energia cinetica che allo stesso istante possiede l'intero sistema per il suo moto rispetto al sistema di riferimento mobile baricentrico $\Omega x' y' z'$ (Ω coincide con il baricentro G del sistema):

$$T = \frac{1}{2} M v_G^2 + \frac{1}{2} J_G \omega^2$$

Esempio 1: pendolo fisico

Asta di lunghezza ℓ e massa trascurabile

Sfera di massa m e raggio $r \Rightarrow J_G = \frac{2}{5} m r^2$

$$\Rightarrow J_O = \frac{2}{5} m r^2 + m (\ell + r)^2$$

Attrito viscoso nel perno (coefficiente β)

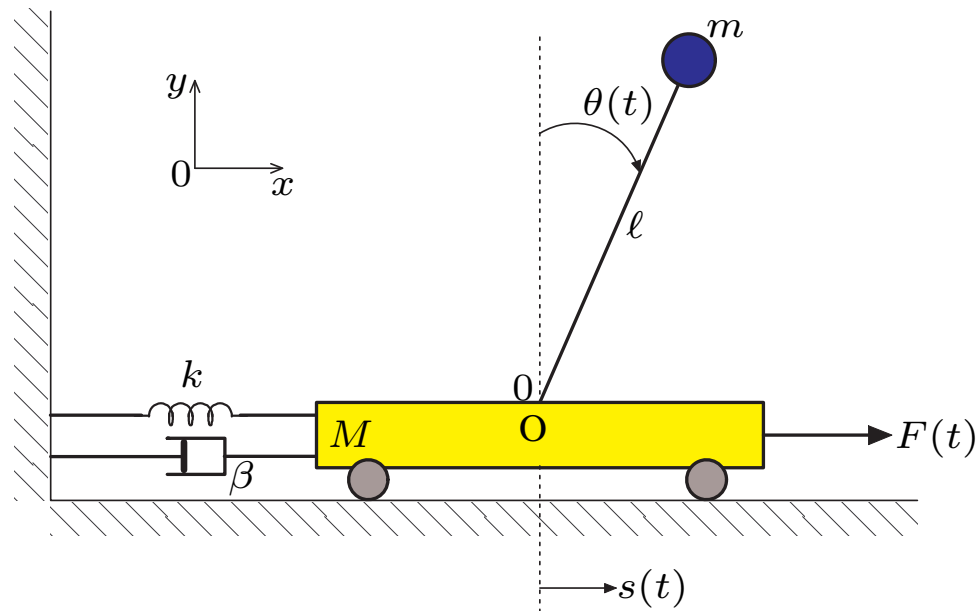
$$T = \frac{1}{2} J_O \dot{\theta}^2, \quad U = -m g (\ell + r) \cos \theta$$

$$q_1 = \theta \Rightarrow \delta L = C \delta \theta - \beta \dot{\theta} \delta \theta \Rightarrow Q_1 = C - \beta \dot{\theta}$$



$$J_O \ddot{\theta} = C - \beta \dot{\theta} - m g (\ell + r) \sin \theta$$

Esempio 2: pendolo semplice inverso su carrello (vedi slide 36)



$$q_1 = s, \quad q_2 = \theta$$

$$T = \frac{1}{2} M v_M^2 + \frac{1}{2} m v_m^2 = \frac{1}{2} M \dot{s}^2 + \frac{1}{2} m (\dot{s}^2 + 2 l \dot{s} \dot{\theta} \cos \theta + l^2 \dot{\theta}^2)$$

$$U = m g l \cos \theta + \frac{1}{2} k s^2$$

$$\delta L = F \delta x - \beta \dot{s} \delta x = F \delta s - \beta \dot{s} \delta s \quad \Rightarrow \quad Q_1 = F - \beta \dot{s}, Q_2 = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{s}} = (M + m) \dot{s} + m l \dot{\theta} \cos \theta$$

$$\frac{\partial T}{\partial s} = 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial s} = k s$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = m \ell^2 \dot{\theta} + m \ell \dot{s} \cos \theta \quad \frac{\partial T}{\partial \theta} = -m \ell \dot{s} \dot{\theta} \sin \theta \quad \frac{\partial U}{\partial s} = -m g \ell \sin \theta$$



$$(M + m) \ddot{s} + m \ell \ddot{\theta} \cos \theta = m \ell \dot{\theta}^2 \sin \theta - k s - \beta \dot{s} + F$$

$$\ddot{s} \cos \theta + \ell \ddot{\theta} = g \sin \theta$$

Esempio 3: pendolo fisico inverso (asta) su carrello (vedi slide 39)

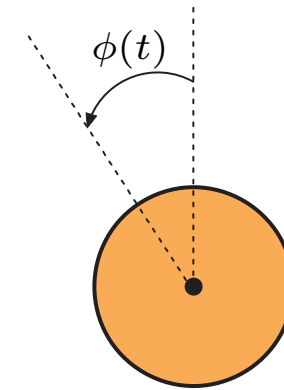
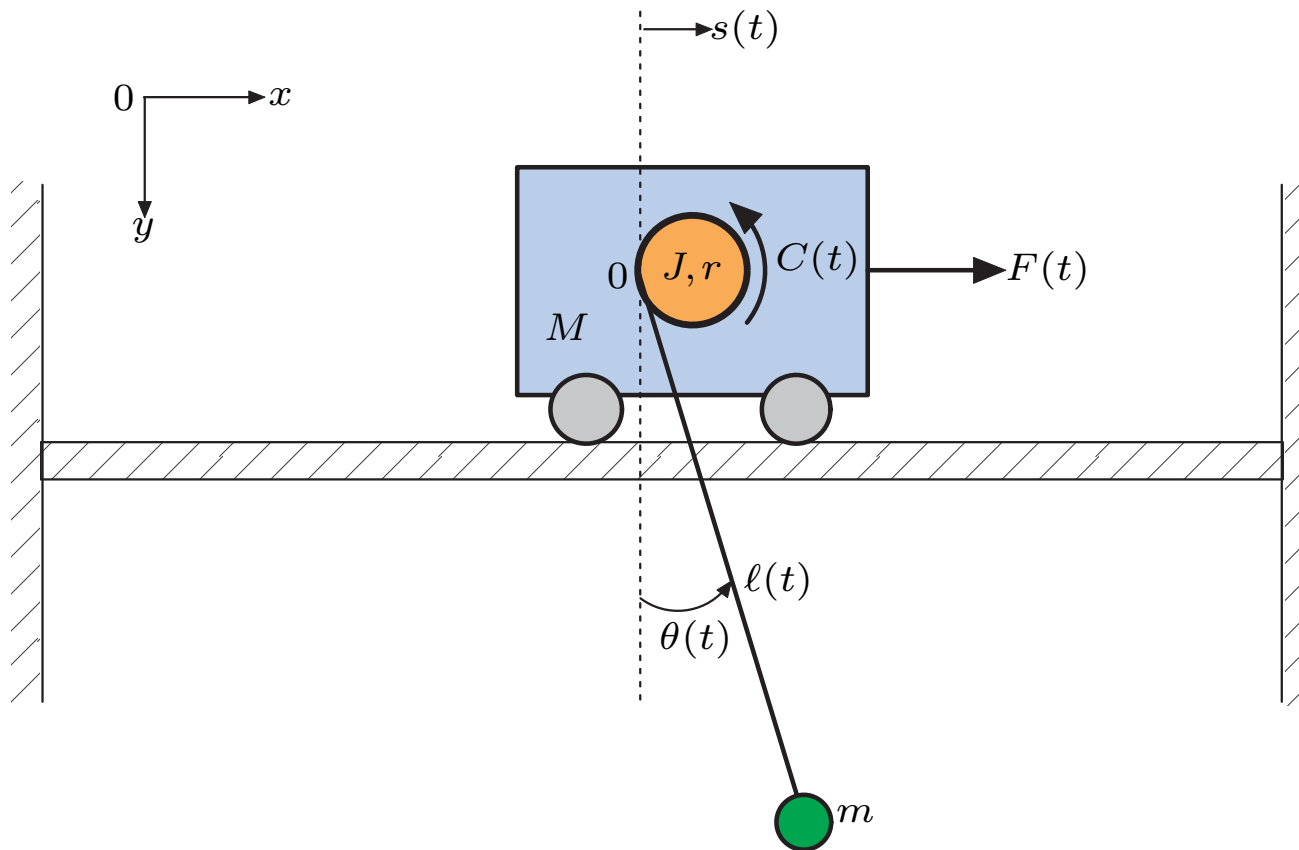
$$T = \frac{1}{2} M \dot{s}^2 + \frac{1}{2} m \left(\dot{s}^2 + \ell \dot{s} \dot{\theta} \cos \theta + \frac{\ell^2}{4} \dot{\theta}^2 \right) + \frac{1}{2} J_G \dot{\theta}^2$$

$$U = m g \frac{\ell}{2} \cos \theta + \frac{1}{2} k s^2$$



si ottengono le equazioni del moto riportate in slide 40

Esempio 4: carro ponte



Puro rotolamento:

$$l = r \phi$$

$$q_1 = s \quad q_2 = \theta \quad q_3 = l$$

$$G_M = (s, 0) \quad G_m = (s + l \sin \theta, l \cos \theta)$$

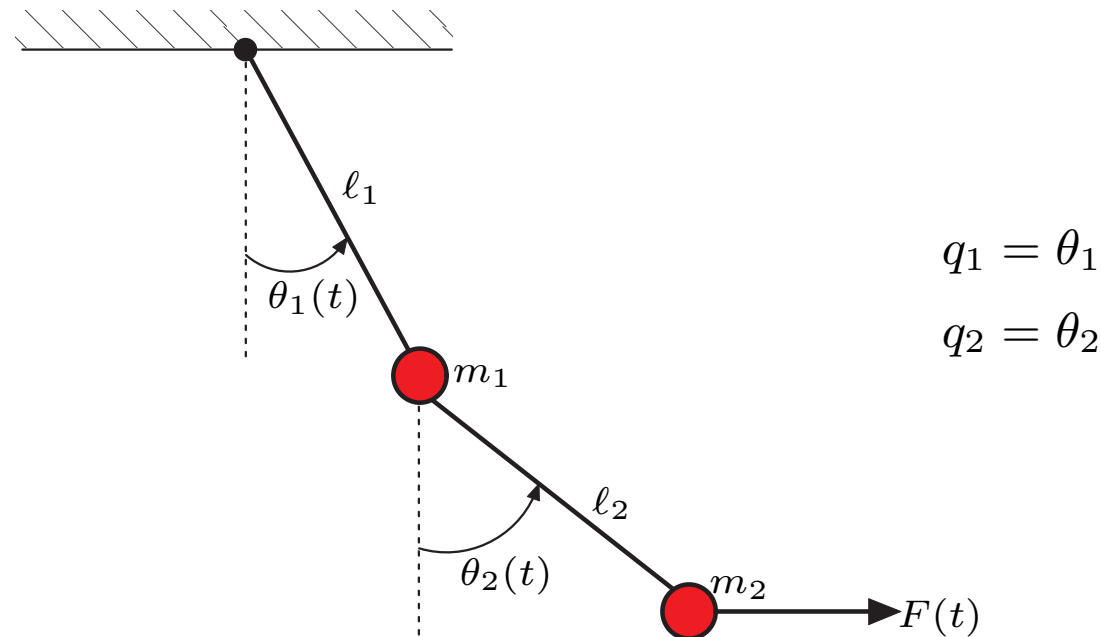
$$\vec{v}_M = (\dot{s}, 0) \quad \vec{v}_m = (\dot{s} + \dot{l} \sin \theta + l \dot{\theta} \cos \theta, \dot{l} \cos \theta - l \dot{\theta} \sin \theta)$$

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{1}{2} J \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} M v_M^2 + \frac{1}{2} m v_m^2 \\
 &= \frac{1}{2} J \frac{\dot{\ell}^2}{r^2} + \frac{1}{2} M \dot{s}^2 + \frac{1}{2} m (\dot{s}^2 + \dot{\ell}^2 + \ell^2 \dot{\theta}^2 + 2 \dot{s} \dot{\ell} \sin \theta + 2 \dot{s} \dot{\theta} \ell \cos \theta)
 \end{aligned}$$

$$U = -m g \ell \cos \theta$$

$$\delta L = F \delta s + C \delta \phi = F \delta s + C \frac{\delta \ell}{r} \quad \Rightarrow \quad Q_1 = F, \quad Q_2 = 0, \quad Q_3 = \frac{C}{r}$$

Esempio 5: doppio pendolo semplice



Ipotesi: la forza applicata $F(t)$ agisce sempre in direzione orizzontale

$$m_1 = (x_1, y_1) = (\ell_1 \sin \theta_1, \ell_1 \cos \theta_1)$$

$$m_2 = (x_2, y_2) = (\ell_1 \sin \theta_1 + \ell_2 \sin \theta_2, \ell_1 \cos \theta_1 + \ell_2 \cos \theta_2)$$

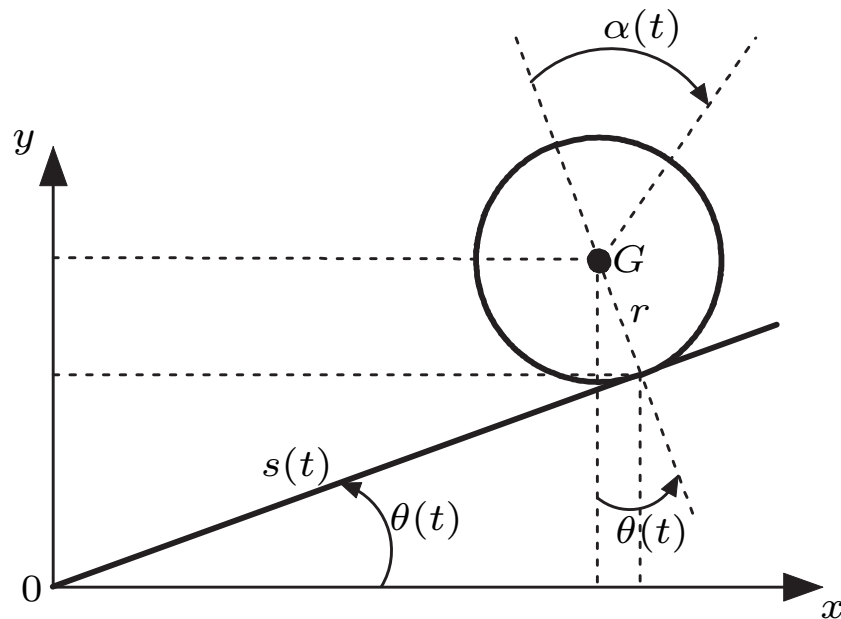
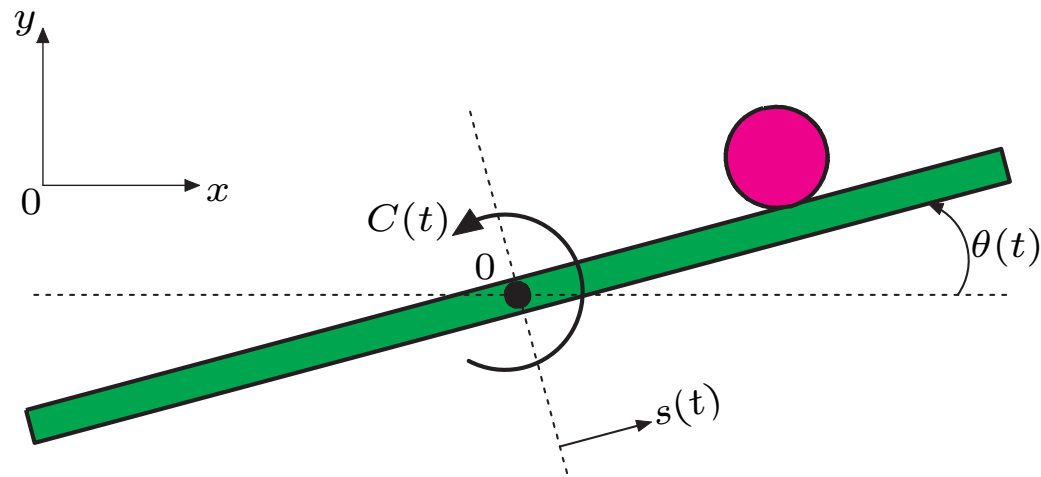
$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m_1 \ell_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 (\ell_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \ell_2^2 \dot{\theta}_2^2 + 2 \ell_1 \ell_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 (\sin \theta_1 \sin \theta_2 + \cos \theta_1 \cos \theta_2)) \\ &= \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \ell_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \ell_2^2 \dot{\theta}_2^2 + m_2 \ell_1 \ell_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) \end{aligned}$$

$$U = -m_1 g \ell_1 \cos \theta_1 - m_2 g (\ell_1 \cos \theta_1 + \ell_2 \cos \theta_2)$$

$$\delta L = F \delta x_2 = F \left(\frac{\partial x_2}{\partial \theta_1} \delta \theta_1 + \frac{\partial x_2}{\partial \theta_2} \delta \theta_2 \right) = F (\ell_1 \cos \theta_1 \delta \theta_1 + \ell_2 \cos \theta_2 \delta \theta_2)$$

$$\implies Q_1 = F \ell_1 \cos \theta_1, \quad Q_2 = F \ell_2 \cos \theta_2$$

Esempio 6: asta rotante–pallina



Asta:

- spessore trascurabile
- momento di inerzia baricentrale J_a

Pallina (sfera):

- massa m
- raggio r
- momento di inerzia baricentrale J_s

Puro rotolamento:

$$s(t) = r \alpha(t)$$

Posizione baricentro sfera:

$$G = (s \cos \theta - r \sin \theta, s \sin \theta + r \cos \theta)$$

$$q_1(t) = s(t), \quad q_2(t) = \theta(t)$$

Attenzione alla velocità angolare della sfera:

$$\omega_s = \dot{\theta} - \dot{\alpha} = \dot{\theta} - \frac{\dot{s}}{r}$$

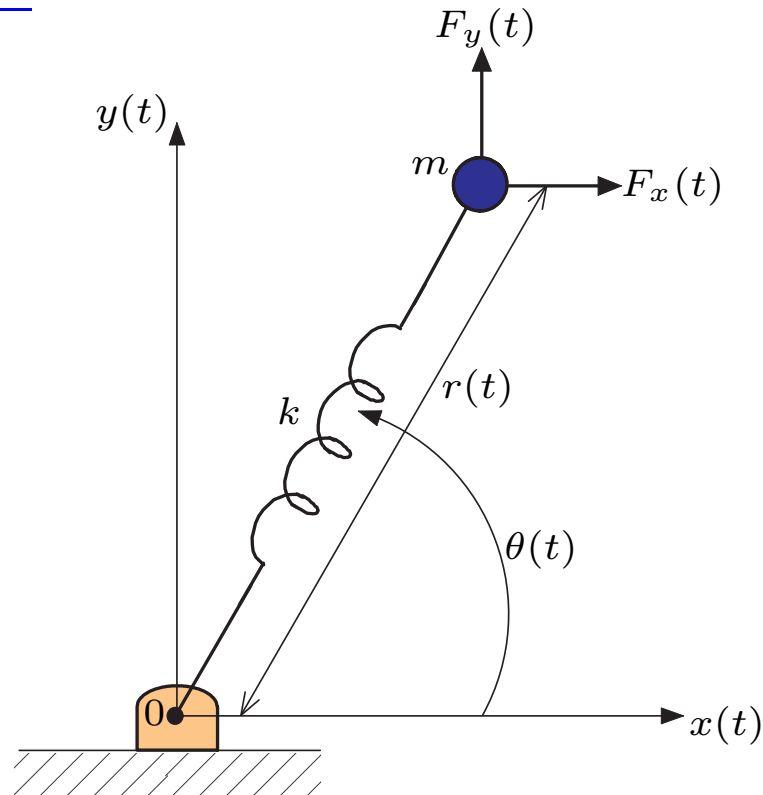
$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} J_a \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} J_s \omega_s^2 \\ &= \frac{1}{2} J_a \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m (\dot{s}^2 + s^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 - 2 r \dot{s} \dot{\theta}) + \frac{1}{2} J_s \left(\dot{\theta}^2 + \frac{\dot{s}^2}{r^2} - 2 \frac{\dot{s} \dot{\theta}}{r} \right) \end{aligned}$$

$$U = m g s \sin \theta + m g r \cos \theta$$

$$\delta L = C \delta \theta \quad \Rightarrow \quad Q_1(t) = 0, \quad Q_2(t) = C(t)$$

Asta di massa M e lunghezza L : $J_a = \frac{M L^2}{12}$

$$J_s = \frac{2}{5} m r^2$$

Esempio 7.

Ipotesi:

- massa m puntiforme
- lunghezza molla a riposo: r_0

$$m = (x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$$

Coordinate cartesiane:

$$q_1(t) = x(t), \quad q_2(t) = y(t)$$

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2), \quad U = m g y + \frac{1}{2} k \left(\sqrt{x^2 + y^2} - r_0 \right)^2$$

$$\delta L = F_x \delta x + F_y \delta y \quad \Rightarrow \quad Q_1(t) = F_x, \quad Q_2(t) = F_y$$

Coordinate polari:

$$q_1(t) = r(t), \quad q_2(t) = \theta(t)$$

$$T = \frac{1}{2} m \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 \right), \quad U = m g r \sin \theta + \frac{1}{2} k (r - r_0)^2$$

$$\delta L = F_x \delta x + F_y \delta y = F_x (\cos \theta \delta r - r \sin \theta \delta \theta) + F_y (\sin \theta \delta r + r \cos \theta \delta \theta)$$

$$\implies Q_1 = F_x \cos \theta + F_y \sin \theta, \quad Q_2 = -F_x r \sin \theta + F_y r \cos \theta$$



$$m \underbrace{(\ddot{r} - r \dot{\theta}^2)}_{\text{acc.radiale}} = -m g \sin \theta - k (r - r_0) + F_x \cos \theta + F_y \sin \theta$$

$$m \underbrace{(r \ddot{\theta} + 2 \dot{r} \dot{\theta})}_{\text{acc.tangenziale}} = -m g \cos \theta - F_x r \sin \theta + F_y r \cos \theta$$