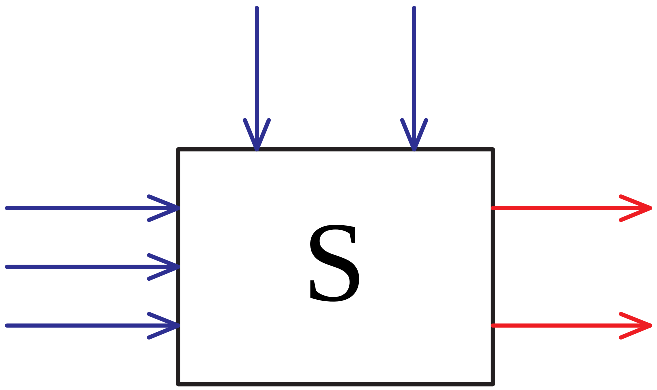
Sistemi e modelli

Sistema (processo): insieme di più parti legate da qualche forma di relazione.

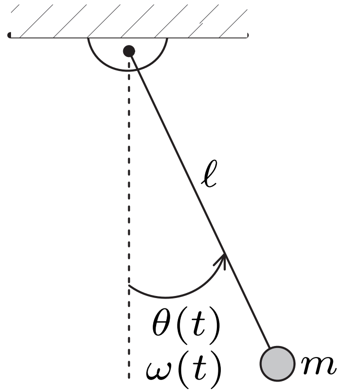
Sistema: oggetto, dispositivo o fenomeno la cui interazione con l'ambiente circostante si manifesta attraverso la variazione di un certo numero di attributi misurabili o variabili, che si possono esprimere con uno o più numeri. In genere l'interazione tra un sistema (fisico o meno) e l'ambiente che lo circonda (esso pure fisico o astratto) viene descritta in termini di *cause* ed *effetti*.



Ingressi: variabili indipendenti (cause) che descrivono l'azione dell'ambiente circostante sul sistema.

Uscite: variabili dipendenti (effetti) che descrivono la risposta del sistema agli ingressi applicati.

Esempio: pendolo semplice



Sistema:

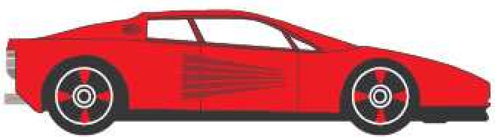
massa puntiforme m
lunghezza asta ℓ
posizione angolare $\theta(t)$
velocità angolare $\omega(t) = \dot{\theta}(t)$

Sistema: si considera una certa porzione di realtà non solo a livello fisico ma anche a livello astratto.

La definizione di sistema è gerarchica $\Longrightarrow$ un sistema può essere suddiviso in sottosistemi.

Esempi:

Sistema: aereo supersonico
Sottosistemi:
reattore, ali, flaps, ...



Sistema: auto sportiva
Sottosistemi:
motore, sospensioni, freni, ...

Modello di un sistema:

- descrizione a parole;
- rappresentazione in scala;
- modello basato sulle leggi dell'analogia;
- modello in forma grafica;

Modello matematico: insieme di relazioni che descrivono i legami esistenti tra i vari attributi misurabili (variabili) del sistema (es. sistema di equazioni differenziali) $\Longrightarrow$ elevato livello di astrazione

Segnali: funzioni che rappresentano l'andamento nel tempo delle variabili del sistema.

Oggi i modelli matematici giocano un ruolo fondamentale nella maggioranza delle discipline scientifiche grazie anche alla Teoria dei Sistemi e del Controllo ed allo sviluppo dei calcolatori elettronici.

L'uso dei modelli matematici si può fare risalire addirittura ad Aristotele, che riconobbe l'importanza delle relazioni numeriche e geometriche nella meccanica, nell'ottica e nell'astronomia.

Soluzione di un problema ingegneristico mediante modello matematico:

1. deduzione di un modello matematico per il processo in esame;
2. soluzione del problema considerato sul modello astratto;
3. implementazione sul processo reale della soluzione trovata.

Attenzione:

modello matematico $\neq$ sistema fisico!

Poiché i modelli matematici limitano la loro descrizione ai legami quantitativi che i sistemi stabiliscono tra i loro attributi misurabili essi costituiscono solo descrizioni approssimate della realtà $\Rightarrow$ non esiste il modello "vero" di un sistema!

Lo stesso termine "legge fisica" è un retaggio del passato e deriva dal considerare la natura come "scritta" in linguaggio matematico $\Rightarrow$ anche le relazioni accettate come leggi fisiche devono essere considerate come modelli non ancora falsificati.

Esempio. Moto dei pianeti: Tolomeo (sistema geocentrico), Keplero (sistema eliocentrico, leggi dei pianeti), Newton (legge di gravitazione universale), Einstein (teoria della relatività).

Esempio. Seconda legge della dinamica.

$$F = m\,a, \quad m \text{ costante} \tag{1}$$

La (1) è esatta? Quando sono state eseguite, in fisica atomica e nucleare, sperimentazioni con velocità elevate e prossime a quella della luce, la costanza di m non è più stata verificata. Dalla Teoria della Relatività (Einstein, XX secolo)

$$m(v) = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

$m(v)$ =massa relativistica, m =massa a riposo, c =velocità della luce nel vuoto.

- La legge di Newton è un buon esempio della ottima precisione che un modello semplice può fornire in un contesto molto ampio di situazioni.
- La determinazione di un modello matematico deve seguire ***criteri di utilità*** e non di verità.

Modello competente: per risolvere un dato problema in un certo contesto del problema.

Modello e problema vanno sempre considerati insieme

$\Downarrow$

scegliere il modello più adatto a risolvere un certo problema

$\Downarrow$

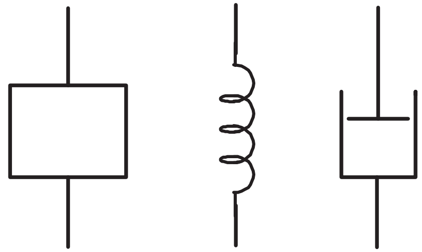
allo stesso sistema fisico si possono associare diversi modelli matematici

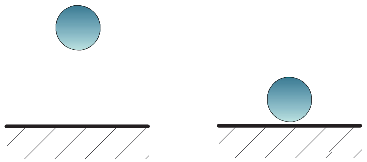
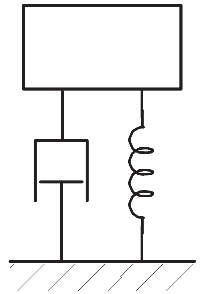
Classificazione dei modelli per obiettivo:

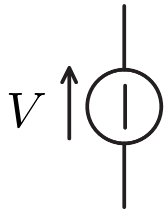
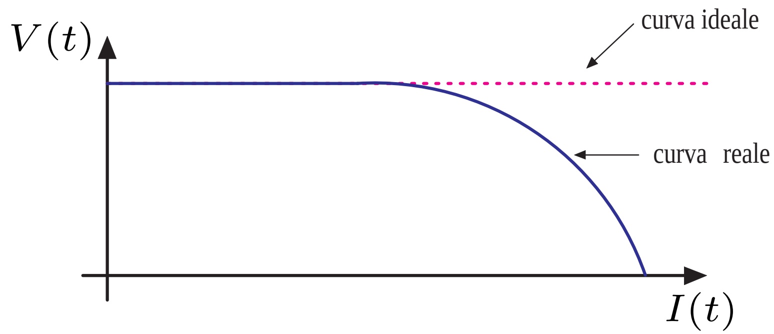
- modelli interpretativi;
- modelli per il controllo;
- modelli predittivi;
- modelli per il filtraggio;
- modelli per la diagnosi;
- modelli per la simulazione.

<u>Attenzione:</u> **componente fisico $\neq$ elemento concettuale!**

Esempi:

Tubo di gomma  $\overset{?}{\Longrightarrow}$ 

Palla che rimbalza  $\Longrightarrow$ 

Generatore di tensione costante  $\Longrightarrow$ 

Costruzione di modelli matematici

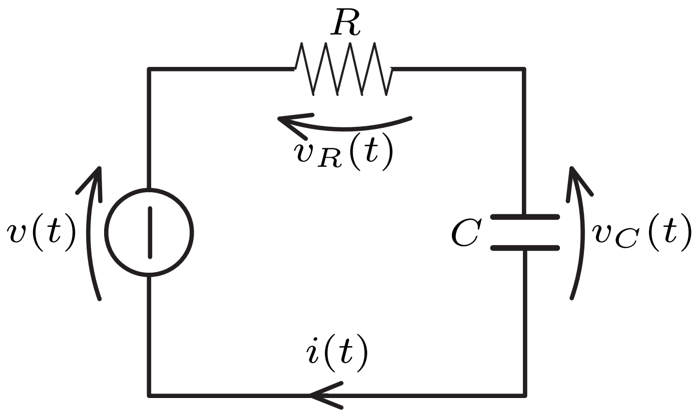
Modellistica fisica (indagine diretta). Si basa sulla partizione del sistema in sottosistemi elementari e sulla loro descrizione attraverso “leggi” note (es. legge di Ohm, legge di Newton). Il modello complessivo si ottiene unendo opportunamente i modelli dei vari sottosistemi (es. principi di Kirchoff per le reti elettriche). Ciò presuppone una conoscenza sufficientemente dettagliata della struttura e dei rapporti causa–effetto che governano il comportamento del sistema.

Identificazione (procedimento a scatola nera). Consiste nel selezionare un modello all’interno di una specifica classe sulla base di un criterio di selezione a partire dalla sola conoscenza delle evoluzioni temporali delle variabili misurabili del sistema. Non si fa alcun riferimento alla natura fisica del sistema $\Rightarrow$ solo i dati “parlano”.

Approcci a scatola grigia: metodi misti che sfruttano sia la conoscenza parziale della struttura del sistema da modellare sia la conoscenza degli andamenti temporali degli ingressi e delle uscite.

Alcuni esempi di modellistica fisica.

Rete RC



Modelli elementari:

(1) $v_R(t) = R\, i(t)$

(2) $i(t) = C\, \dfrac{dv_C(t)}{dt}$

$v(t)$ ingresso indipendente da $i(t)$

Principio di Kirchoff alle maglie (bilancio delle tensioni): (3) $v(t) - v_R(t) - v_C(t) = 0$

Se l'uscita di interesse è $v_C(t)$ il modello completo che si ottiene utilizzando (1), (2) e (3) è

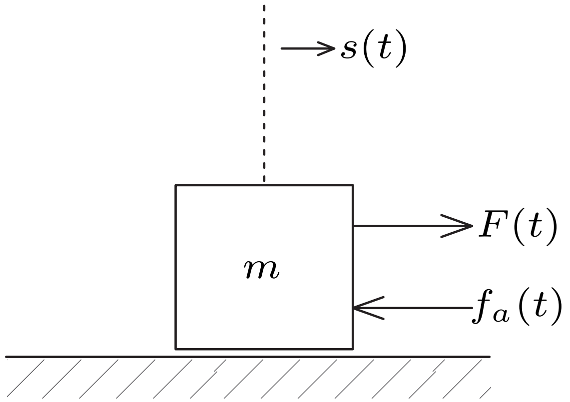
$$\boxed{v(t) = R\,C\,\frac{dv_C(t)}{dt} + v_C(t)}$$

Se l'uscita di interesse è la corrente $i(t)$ si utilizzano la (2) e le derivate rispetto al tempo di (1) e (3) ottenendo

$$\boxed{\frac{dv(t)}{dt} = R\,\frac{di(t)}{dt} + \frac{i(t)}{C}}$$

Massa con attrito viscoso

Nel sistema meccanico seguente, al corpo di massa m è applicata una forza esterna $F(t)$. Il moto è soggetto ad un attrito viscoso di coefficiente β.



Modelli elementari:

(1) $f_a(t) = \beta \dfrac{ds(t)}{dt} = \beta\, \dot{s}(t)$

(2) $f_{\mathrm{tot}}(t) = F(t) - f_a(t)$

Seconda legge della dinamica: (3) $m\, \ddot{s}(t) = f_{\mathrm{tot}}(t)$

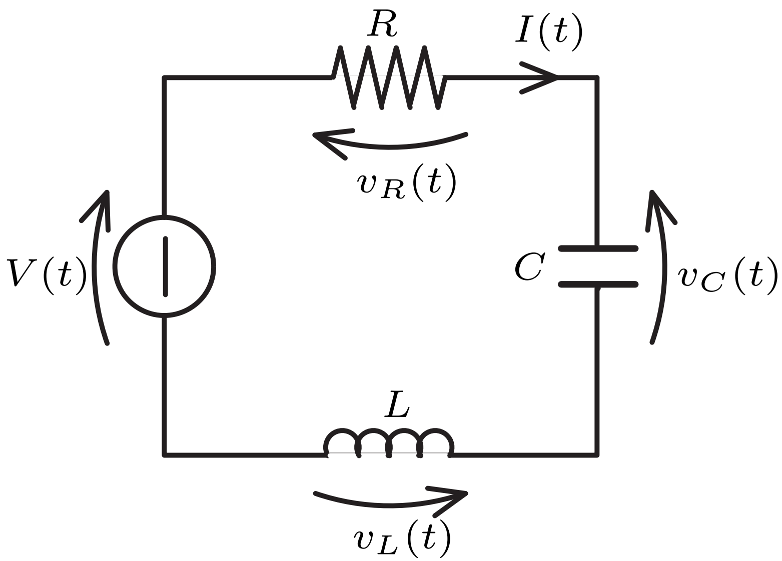
Se l'uscita di interesse è la posizione il modello matematico risulta

$$\boxed{m\, \ddot{s}(t) = F(t) - \beta\, \dot{s}(t)}$$

Se l'uscita di interesse è la velocità si può anche considerare il modello

$$\boxed{m\, \dot{v}(t) = F(t) - \beta\, v(t)} \qquad \text{dove} \quad v(t) = \dot{s}(t)$$

Rete RLC



Modelli elementari:

(1) $v_R(t) = R\,I(t)$

(2) $I(t) = C\,\dot{v}_C(t)$

(3) $v_L(t) = L\,\dot{I}(t)$

Principio di Kirchoff alle maglie (bilancio delle tensioni): (4) $V(t) - v_R(t) - v_C(t) - v_L(t) = 0$

Se l'uscita di interesse è $v_C(t)$

$$\boxed{\ddot{v}_c(t) + \frac{R}{L}\dot{v}_C(t) + \frac{1}{LC}v_C(t) = \frac{V(t)}{LC}}$$

Se l'uscita di interesse è la corrente

$$\boxed{\ddot{I}(t) + \frac{R}{L}\dot{I}(t) + \frac{1}{LC}I(t) = \frac{\dot{V}(t)}{L}}$$

Se l'uscita di interesse è la carica $Q(t)$ del condensatore si possono utilizzare i modelli elementari

(5) $Q(t) = C\, v_C(t)$

(6) $I(t) = \dot{Q}(t)$

per ottenere il modello matematico

$$\boxed{\ddot{Q}(t) + \frac{R}{L}\dot{Q}(t) + \frac{1}{LC}Q(t) = \frac{V(t)}{L}}$$

Sistema massa–molla–smorzatore

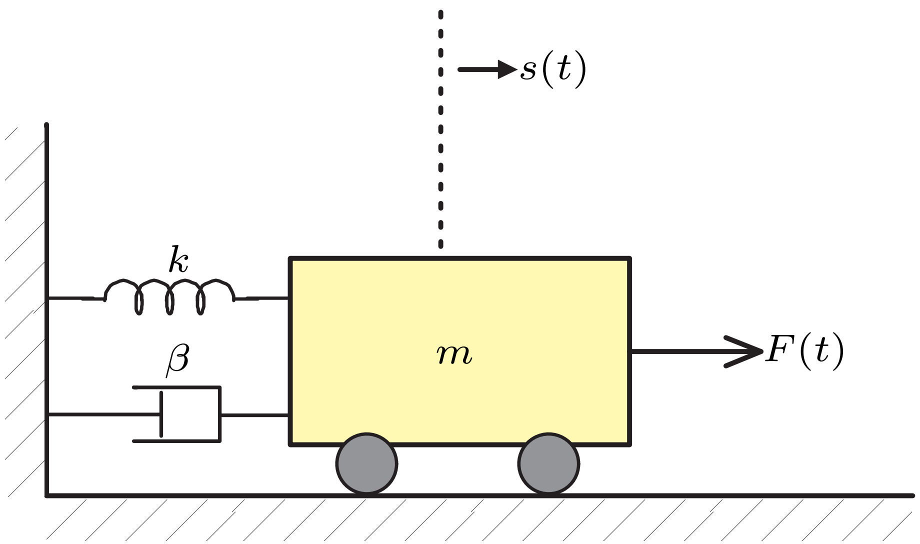
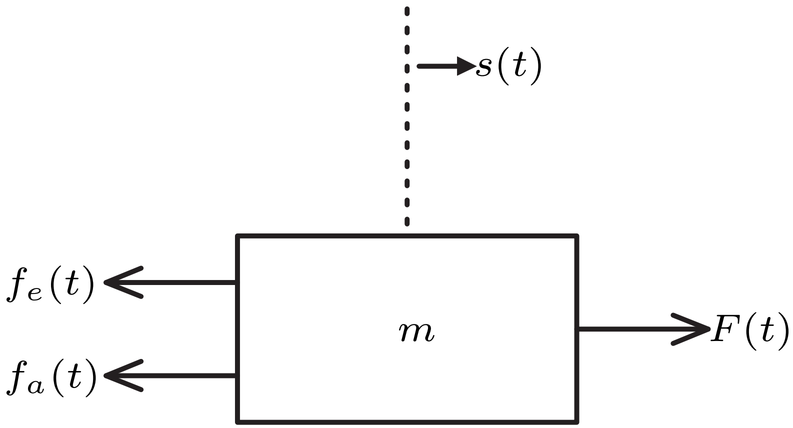


Diagramma di corpo libero:



Assumendo che la molla sia a riposo per $s(t) = 0$ si hanno i modelli elementari:

(1) $f_e(t) = k\, s(t)$

(2) $f_a(t) = \beta\, \dot{s}(t)$

(3) $f_{\text{tot}}(t) = F(t) - f_e(t) - f_a(t)$

Seconda legge della dinamica: (4) $m\, \ddot{s}(t) = f_{\text{tot}}(t)$

Modello matematico del sistema:

$$\boxed{m\, \ddot{s}(t) = F(t) - k\, s(t) - \beta\, \dot{s}(t)}$$

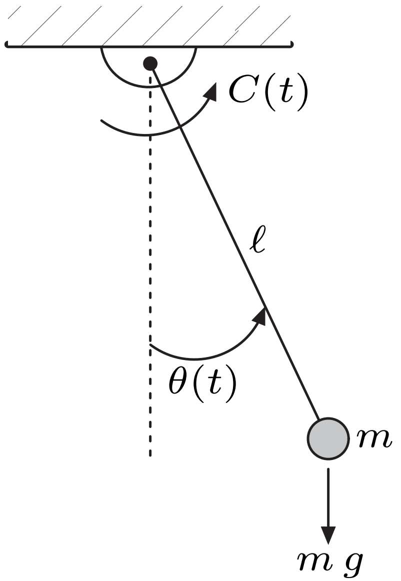
ovvero

$$\boxed{\ddot{s}(t) + \frac{\beta}{m}\, \dot{s}(t) + \frac{k}{m}\, s(t) = \frac{F(t)}{m}}$$

Se la molla è di tipo non lineare con caratteristica forza–spostamento del tipo (1’) $f_e(t) = k_1\, s(t) + k_2\, s^3(t)$, il modello diventa

$$\boxed{\ddot{s}(t) + \frac{\beta}{m}\, \dot{s}(t) + \frac{k_1}{m}\, s(t) + \frac{k_2}{m}\, s^3(t) = \frac{F(t)}{m}}$$

Pendolo semplice



Coppie applicate rispetto all'asse di rotazione:

(1) $C(t)$ (ingresso indipendente)

(2) $C_p(t) = m\,g\,\ell\,\mathrm{sen}\,\theta(t)$ (coppia dovuta alla forza peso)

(3) $C_{\mathrm{tot}}(t) = C(t) - C_p(t)$

Seconda legge della dinamica per i moti di rotazione: (4) $J\,\ddot{\theta}(t) = C_{\mathrm{tot}}(t)$,
dove J è il momento di inerzia del pendolo rispetto all'asse di rotazione $J = m\,\ell^2$.

Il modello matematico è

$$\boxed{J\,\ddot{\theta}(t) = C(t) - m\,g\,\ell\,\mathrm{sen}\,\theta(t)}$$

ovvero

$$\boxed{\ddot{\theta}(t) + \frac{g}{\ell}\,\mathrm{sen}\,\theta(t) = \frac{C(t)}{m\,\ell^2}}$$

I modelli matematici ottenuti sono equazioni differenziali ordinarie del tipo

$$\boxed{\frac{d^n y}{dt^n} = f\left(\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}, \ldots, \frac{dy}{dt}, y(t), \frac{d^{m-1}u}{dt^{m-1}}, \ldots, \frac{du}{dt}, u(t)\right),}$$

dove $u(t)$ ed $y(t)$ sono l'ingresso e l'uscita mentre n rappresenta l'ordine del modello (dell'equazione differenziale). Nel caso lineare

$$\boxed{a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0\, y(t) = b_m \frac{d^m u}{dt^m} + \cdots + b_1 \frac{du}{dt} + b_0\, u(t).}$$

Per risolvere l'equazione differenziale, cioè per determinare un segnale $y(t)$ che la soddisfi per $t_0 \leq t \leq t_f$ occorre conoscere:

1. le condizioni iniziali

$$y(t_0),\ \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=t_0}, \ldots, \left.\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}\right|_{t=t_0}$$

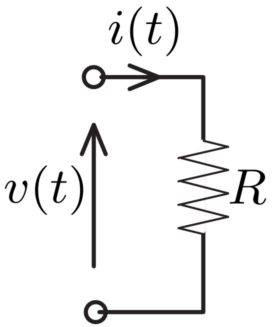
2. il segnale di ingresso nell'intervallo $[t_0, t_f]$

$$u(t), \quad t_0 \leq t \leq t_f.$$

Partendo dall'equazione differenziale si ricavano agevolmente la funzione di trasferimento e la risposta frequenziale, sulle quali si basa tutta la teoria classica dei controlli automatici.

Tipologie di modelli

Modelli orientati. Gli attributi misurabili sono stati suddivisi in ingressi ed uscite. A volte l'orientamento è imposto dall'ambiente esterno e non dal sistema:



quale orientamento? $\big(u(t) = ?, y(t) = ?\big)$

Modelli liberi (autonomi). Non sono presenti variabili di ingresso. Le sequenze di uscita sono anche chiamate *serie temporali*. Ad esempio, nel pendolo semplice, se non vi sono coppie esterne applicate si ha: $\ddot{\theta}(t) + \frac{g}{\ell}\,\mathrm{sen}\,\theta(t) = 0$.

Modelli causali. Le variabili del sistema non dipendono (dipendono) dal futuro. Tutti i sistemi fisici sono causali. Ciò implica $\boxed{m \le n}$ nell'equazione differenziale.

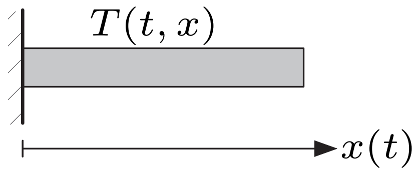
Modelli algebrici o statici. Le uscite del sistema non dipendono dal passato ma solo dal presente. Sono rappresentati da equazioni algebriche. Ad esempio, in una resistenza elettrica $v_R(t) = R\,i(t)$.

Modelli dinamici. Le uscite dipendono dalla storia passata del sistema. I modelli dinamici hanno dunque "memoria" e sono descritti da equazioni differenziali o alle differenze, funzioni di risposta armonica, etc. La memoria dei sistemi fisici è legata alla capacità di accumulare energia.

Modelli puramente dinamici e non puramente dinamici. Le uscite al tempo t non dipendono (dipendono) dagli ingressi allo stesso istante t. Si ha dunque $m < n$ per i primi e $m = n$ per i secondi.

Modelli parametrici e non parametrici. I modelli parametrici sono costituiti da sistemi di equazioni (algebriche, differenziali) descritte da un certo numero di parametri quelli non parametrici da opportune funzioni che consentono di ottenere direttamente le risposte a determinati ingressi (es. funzione di risposta impulsiva, funzione di risposta armonica).

Modelli a parametri concentrati e a parametri distribuiti. I fenomeni fisici da descrivere possono essere concentrati in singole regioni dello spazio (equazioni differenziali alle derivate ordinarie) o essere distribuiti lungo linee, aree o volumi (equazioni differenziali alle derivate parziali). Si consideri, ad esempio la seguente sbarra metallica sottile riscaldata ad una estremità:



Tale sistema è descritto da una equazione del tipo $\dfrac{\partial T(t,x)}{\partial t} = k_1 \dfrac{\partial^2 T(t,x)}{\partial x^2} + k_2\,(T(t,x) - T_a)$, dove T_a è la temperatura ambiente.

Modelli lineari e non lineari. Per i modelli lineari vale il *principio di sovrapposizione degli effetti*: si considerino i segnali di ingresso $u'(t)$, $u''(t)$ e le corrispondenti uscite (a partire da condizioni iniziali nulle) $y'(t)$, $y''(t)$. Per ogni coppia di costanti α, β, al segnale di ingresso $\alpha\, u'(t) + \beta\, u''(t)$ corrisponde l'uscita $\alpha\, y'(t) + \beta\, y''(t)$.

Modelli stazionari e non stazionari. Per i sistemi stazionari vale la *proprietà di traslazione nel tempo di cause ed effetti*: se applicando al sistema l'ingresso $u(t)$ la risposta è $y(t)$ allora, a parità di condizioni iniziali, all'ingresso traslato nel tempo $u(t - t_o)$ il sistema ripsonde con l'uscita $y(t - t_o)$. I parametri del modello non sono quindi funzioni del tempo.

Modelli SISO e MIMO. Con un ingresso ed una uscita (single–input single–output), con più ingressi e più uscite (multi–input multi–output).

Modelli a tempo continuo e a tempo discreto. In un intervallo di tempo finito le variabili possono cambiare valore infinite volte (tempo continuo) o un numero finito di volte (tempo discreto).

Modelli deterministici e stocastici. Nei modelli stocastici sono presenti variabili descritte per mezzo di tecniche probabilistiche (variabili aleatorie e processi stocastici). Se i disturbi presenti nel sistema vengono descritti come processi stocastici il modello diventa stocastico.

Modelli nello spazio degli stati

In tali modelli sono presenti, oltre alle variabili di ingresso ed uscita, anche le variabili di stato. Esse descrivono la "situazione interna" del sistema (che dipende dalla storia passata) necessaria per determinare l'uscita. Rappresentano quindi la "memoria" del sistema dinamico.

Stato: informazione che riassume, in ogni istante, l'effetto della storia passata del sistema sul suo comportamento futuro.

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f\left(x(t), u(t), t\right) \\ y(t) &= g\left(x(t), u(t), t\right) \end{aligned}}$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \quad u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_r(t) \end{bmatrix}, \quad y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_m(t) \end{bmatrix}, \quad \begin{cases} x(t) \ (n \times 1) & \text{vettore degli stati} \\ u(t) \ (r \times 1) & \text{vettore degli ingressi} \\ y(t) \ (m \times 1) & \text{vettore delle uscite} \end{cases}$$

$f : \mathcal{R}^n \times \mathcal{R}^r \times \mathcal{R} \to \mathcal{R}^n$ è la funzione di velocità di transizione dello stato

$g : \mathcal{R}^n \times \mathcal{R}^r \times \mathcal{R} \to \mathcal{R}^m$ è la funzione di uscita

$$f\left(x(t), u(t), t\right) = \begin{bmatrix} f_1\left(x(t), u(t), t\right) \\ f_2\left(x(t), u(t), t\right) \\ \vdots \\ f_n\left(x(t), u(t), t\right) \end{bmatrix} \qquad g\left(x(t), u(t), t\right) = \begin{bmatrix} g_1\left(x(t), u(t), t\right) \\ g_2\left(x(t), u(t), t\right) \\ \vdots \\ g_m\left(x(t), u(t), t\right) \end{bmatrix}$$

Il modello nello spazio degli stati è dunque descritto da due equazioni vettoriali:

- un'equazione differenziale (equazione di stato) costituita da n equazioni differenziali del primo ordine, che mette in relazione le variabili di ingresso con quelle di stato (n è l'ordine del modello);
- un'equazione algebrica (trasformazione di uscita), che consente di determinare l'uscita (le variabili di uscita) ad un certo istante di tempo a partire dalla conoscenza dello stato (delle variabili di stato) e dell'ingresso (delle variabili di ingresso) allo stesso istante di tempo.

Per risolvere l'equazione differenziale di stato, cioè per determinare un segnale $x(t)$ che la soddisfi per $t_0 \leq t \leq t_f$ occorre conoscere:

1. lo stato iniziale

$$x(t_0) = \begin{bmatrix} x_1(t_0) \\ x_2(t_0) \\ \vdots \\ x_n(t_0) \end{bmatrix}$$

2. il segnale di ingresso nell'intervallo $[t_0, t_f]$

$$u(t), \quad t_0 \leq t \leq t_f.$$

- L'uscita $y(t)(t_0 \leq t \leq t_f)$ viene poi determinata utilizzando la funzione $g \Longrightarrow$ la conoscenza dello stato ad un istante t_0, $x(t_0)$ e del segmento di funzione di ingresso $u[t_0, t_f]$, consente quindi di determinare univocamente il segmento di funzione di uscita $y[t_0, t_f]$.

Essendo l'ingresso noto, la soluzione dell'equazione di stato è la soluzione di un *problema di Cauchy*. Consideriamo $u(t)$ un segnale finito e continuo a tratti.

Teorema. Si consideri l'equazione differenziale vettoriale

$$\dot{x}(t) = f'\left(x(t), t\right). \tag{2}$$

Essa ammette un'unica soluzione $x(t)$ che soddisfa la condizione iniziale $x(t_0) = x_0 \; \forall t_0 \in \mathcal{R}$ assegnato e $\forall x_0 \in \mathcal{R}^n$ se

1. $\forall x \in \mathcal{R}^n$, $f'(x, \cdot)$ è continua a tratti per $t \geq t_0$;
2. $\forall t \geq t_0$ che non sia punto di discontinuità di $f'(x, \cdot)$ e per ogni coppia di vettori x_1, x_2 è soddisfatta la *condizione di Lipschitz*

$$\|f'(x_1, t) - f'(x_2, t)\| \leq k(t) \, \|x_1 - x_2\|,$$

dove $k(t)$ è una funzione limitata e continua a tratti e $\| \cdot \|$ è una qualunque norma di $\mathcal{R}^n$.

Corollario. Ogni soluzione dell'equazione differenziale (2) è una funzione continua $\Longrightarrow x(t)$ è sempre continuo mentre $y(t)$ può essere discontinua se lo è $u(t)$.

Moto (movimento): è l'evoluzione temporale dello stato

Risposta: è l'evoluzione temporale dell'uscita

$$x(t) = \phi\left(t, t_0, x_0, u(\cdot)\right) \quad \text{funzione di transizione dello stato}$$

La funzione $\phi(\cdot)$ consente, insieme alla funzione di uscita $g\left(x(t), u(t), t\right)$, di determinare l'uscita $y(t)$ per ogni t. È anche possibile inglobare la $\phi(\cdot)$ nella $g(\cdot)$ ed ottenere direttamente l'uscita:

$$y(t) = \gamma\left(t, t_0, x_0, u(\cdot)\right) \quad \text{funzione di risposta}$$

Per i sistemi lineari, se $\underline{x_0 = \alpha\, x_0' + \beta\, x_0''}$ e $\underline{u(\cdot) = \alpha\, u'(\cdot) + \beta\, u''(\cdot)}$ (α, β scalari) si ha:

$$\phi\left(t, t_0, x_0, u(\cdot)\right) = \alpha\, \phi\left(t, t_0, x_0', u'(\cdot)\right) + \beta\, \phi\left(t, t_0, x_0'', u''(\cdot)\right)$$
$$\gamma\left(t, t_0, x_0, u(\cdot)\right) = \alpha\, \gamma\left(t, t_0, x_0', u'(\cdot)\right) + \beta\, \gamma\left(t, t_0, x_0'', u''(\cdot)\right)$$

Infatti:

$x(t) = \alpha\, x'(t) + \beta\, x''(t)$ $\qquad$ $x'(t), x''(t)$ moti relativi a $x_0', u'(t)$ e $x_0'', u''(t)$

$y(t) = \alpha\, y'(t) + \beta\, y''(t)$ $\qquad$ $y'(t), y''(t)$ uscite relative a $x_0', u'(t)$ e $x_0'', u''(t)$

Si ponga ora:

$$x_0' = x_0, \quad x_0'' = 0, \quad u'(t) = 0, \quad u''(t) = u(t), \quad \alpha = \beta = 1$$

Si ha:

$$\phi\,(t, t_0, x_0, u(\cdot)) = \underbrace{\phi\,(t, t_0, x_0, 0)}_{\text{moto libero}} + \underbrace{\phi\,(t, t_0, 0, u(\cdot))}_{\text{moto forzato}}$$

$$\gamma\,(t, t_0, x_0, u(\cdot)) = \underbrace{\gamma\,(t, t_0, x_0, 0)}_{\text{risposta libera}} + \underbrace{\gamma\,(t, t_0, 0, u(\cdot))}_{\text{risposta forzata}}$$

- Moto libero e risposta libera dipendono solo dalle condizioni iniziali del sistema (l'ingresso applicato è nullo).
- Moto forzato e risposta forzata dipendono solo dall'ingresso applicato al sistema (le condizioni iniziali sono nulle).
- Per i sistemi lineari vale dunque il *principio di sovrapposizione degli effetti*: è possibile studiare separatamente gli effetti sul moto e sulla risposta dovuti allo stato iniziale ed all'ingresso.

Tipologie di modelli nello spazio degli stati

Modelli algebrici

$$y(t) = g(u(t), t)$$

Modelli puramente dinamici

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f\left(x(t), u(t), t\right) \\ y(t) &= g\left(x(t), t\right) \end{aligned}$$

Modelli stazionari: non vi è dipendenza esplicita dal tempo in f e g

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f\left(x(t), u(t)\right) \\ y(t) &= g\left(x(t), u(t)\right) \end{aligned}}$$

Modelli lineari: f e g sono funzioni lineari in x e u

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)\, x(t) + B(t)\, u(t) \\ y(t) &= C(t)\, x(t) + D(t)\, u(t) \end{aligned}$$

Modelli lineari e stazionari

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A\,x(t) + B\,u(t) \\ y(t) &= C\,x(t) + D\,u(t) \end{aligned}}$$

dove:

A $(n \times n)$: matrice dinamica

B $(n \times r)$: matrice di distribuzione degli ingressi

C $(m \times n)$: matrice di distribuzione delle uscite

D $(m \times r)$: legame algebrico ingresso–uscita (nulla per modelli puramente dinamici)

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nr} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} d_{11} & \dots & d_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mr} \end{bmatrix}$$

Determinazione di un modello matematico nello spazio degli stati:

1. Individuazione delle variabili di ingresso ed uscita
2. Scelta delle variabili di stato
3. Scrittura delle equazioni costitutive

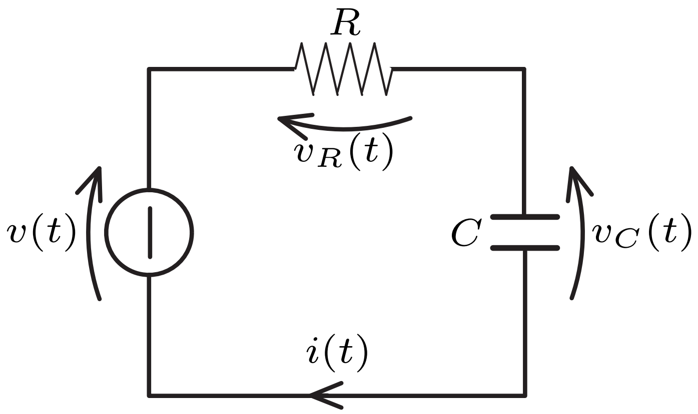
Passo 1. Dipende dal contesto (variabili manipolabili, variabili misurabili, etc.).

Passo 2. La scelta delle variabili di stato non è univocamente definita. Nel caso di sistemi fisici si individuano i sottosistemi elementari in grado di accumulare energia o materia, in quanto rappresentano la "memoria" del sistema.

Passo 3. Interconnessione delle relazioni dei singoli sottosistemi: principi di Kirchoff, legge di Ohm generalizzata, leggi della dinamica, leggi di Maxwell dell'elettromagnetismo, equazione di Bernoulli, principi della termodinamica, bilanci di energia, bilanci di massa.

Esempi di modelli nello spazio degli stati.

Rete RC



$$v_R(t) = R\,i(t)$$

$$i(t) = C\,\frac{dv_C(t)}{dt}$$

$$v(t) - v_R(t) - v_C(t) = 0$$

Ponendo $u(t) = v(t)$, $x(t) = v_C(t)$ e $y(t) = v_C(t)$ si ha:

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \dot{x}(t) & = & -\dfrac{x(t)}{R\,C} + \dfrac{u(t)}{R\,C} \\ y(t) & = & x(t) \end{array}}$$

Il modello è dunque del tipo

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= a\,x(t) + b\,u(t) \\ y(t) &= c\,x(t) \end{aligned} \qquad \text{con} \qquad \begin{cases} a &= -\frac{1}{R\,C} \\ b &= \frac{1}{R\,C} \\ c &= 1 \end{cases}$$

Se l'uscita di interesse è la corrente $i(t)$ ($y(t) = i(t)$) l'equazione di stato non cambia e si modifica solo quella di uscita:

$$i(t) = \frac{v_R(t)}{R} = \frac{v(t) - v_C(t)}{R} \implies y(t) = \frac{u(t) - x(t)}{R}$$

Si ha dunque

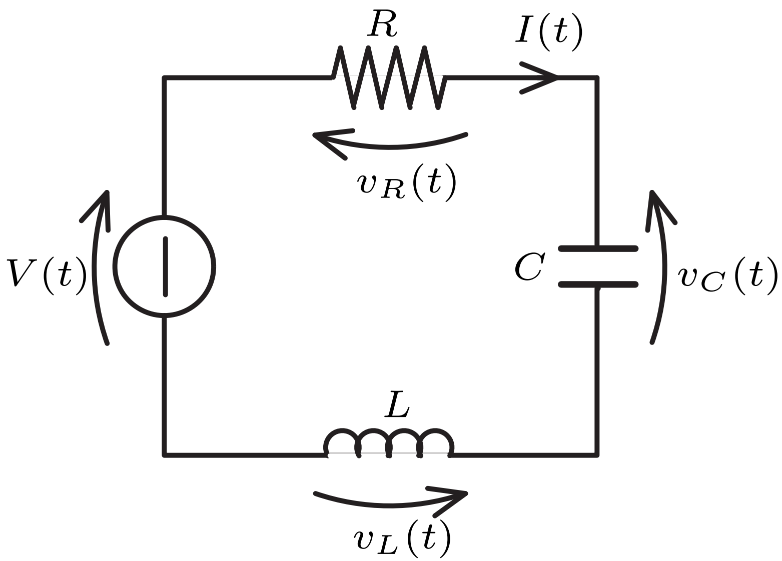
$$\boxed{\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -\frac{x(t)}{R\,C} + \frac{u(t)}{R\,C} \\ y(t) &= -\frac{x(t)}{R} + \frac{u(t)}{R} \end{aligned}}$$

Il modello è dunque del tipo

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= a\,x(t) + b\,u(t) \\ y(t) &= c\,x(t) + d\,u(t) \end{aligned} \qquad \text{con} \qquad \begin{cases} a &= -\frac{1}{R\,C} \\ b &= \frac{1}{R\,C} \\ c &= -\frac{1}{R} \\ d &= \frac{1}{R} \end{cases}$$

Considerazioni simili valgono per altre scelte della variabile di uscita come $v_R(t)(y(t) = u(t) - x(t))$ o la carica $Q(t)(y(t) = C\,x(t))$.

Rete RLC



$$v_R(t) = R\,I(t)$$

$$I(t) = C\,\dot{v}_C(t)$$

$$v_L(t) = L\,\dot{I}(t)$$

$$v(t) - v_R(t) - v_C(t) - v_L(t) = 0$$

Ponendo $u(t) = V(t)$, $x_1(t) = I(t)$, $x_2(t) = v_C(t)$, $y_1(t) = I(t)$, $y_2(t) = v_C(t)$ si ha:

$$\boxed{\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= -\frac{R}{L}x_1(t) - \frac{x_2(t)}{L} + \frac{u(t)}{L} \\
\dot{x}_2(t) &= \frac{x_1(t)}{C} \\
y_1(t) &= x_1(t) \\
y_2(t) &= x_2(t)
\end{aligned}}$$

Il modello è dunque del tipo:

$$\dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,u(t)$$
$$y(t) = C\,x(t)$$

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

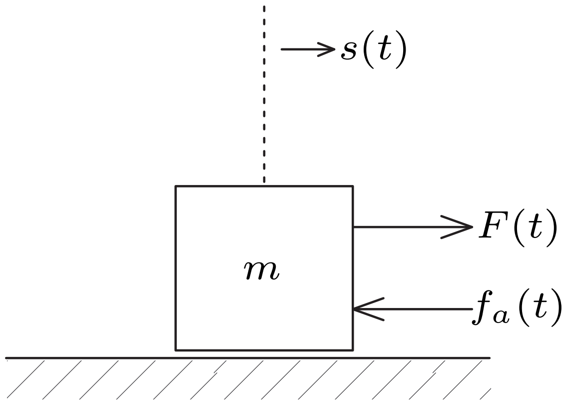
Se le uscite di interesse sono $y_1(t) = v_L(t)$ e $y_2(t) = Q(t)$ (carica del condensatore):

$$\dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,u(t)$$
$$y(t) = C\,x(t) + D\,u(t)$$

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} -R & -1 \\ 0 & C \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Massa con attrito viscoso



$$f_a(t) = \beta \frac{ds(t)}{dt} = \beta\, \dot{s}(t)$$

$$f_{\mathrm{tot}}(t) = F(t) - f_a(t)$$

$$m\, \ddot{s}(t) = f_{\mathrm{tot}}(t)$$

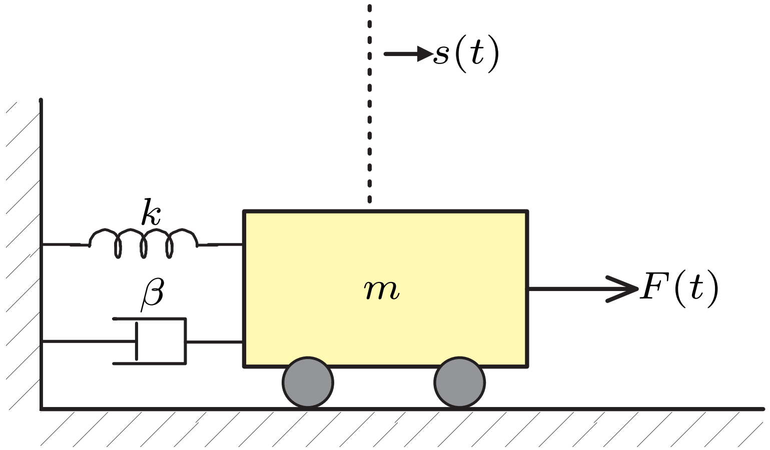
Ponendo $u(t) = F(t)$, $x_1(t) = s(t)$, $x_2(t) = \dot{s}(t)$ e $y(t) = s(t)$ si ha:

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -\frac{\beta}{m} x_2(t) + \frac{u(t)}{m} \\ y(t) &= x_1(t) \end{aligned}}$$

Se l'uscita di interesse è la velocità si può anche considerare il modello

$$\boxed{m\, \dot{v}(t) = F(t) - \beta\, v(t)} \qquad \text{dove} \quad v(t) = \dot{s}(t)$$

Sistema massa–molla–smorzatore



$$f_e(t) = k\, s(t)$$

$$f_a(t) = \beta\, \dot{s}(t)$$

$$f_{\text{tot}}(t) = F(t) - f_e(t) - f_a(t)$$

$$m\, \ddot{s}(t) = f_{\text{tot}}(t)$$

Ponendo $u(t) = F(t)$, $x_1(t) = s(t)$, $x_2(t) = \dot{s}(t)$ e $y(t) = s(t)$ si ha:

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -\frac{k}{m} x_1(t) - \frac{\beta}{m} x_2(t) + \frac{u(t)}{m} \\ y(t) &= x_1(t) \end{aligned}}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{\beta}{m} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Se la molla è di tipo non lineare con caratteristica forza–spostamento del tipo $f_e(t) = k_1\, s(t) + k_2\, s^3(t)$ con $k_1 > 0$ e $k_2 > 0$ (molla "hard"), il modello diventa

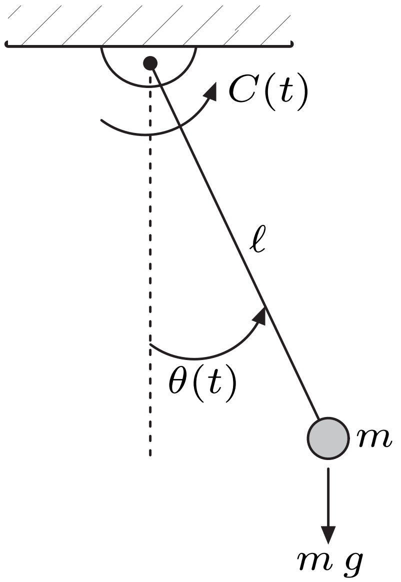
$$\boxed{\begin{array}{rcl} \dot{x}_1(t) & = & x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) & = & -\dfrac{k_1}{m}x_1(t) - \dfrac{k_2}{m}x_1^3(t) - \dfrac{\beta}{m}x_2(t) + \dfrac{u(t)}{m} \\ y(t) & = & x_1(t) \end{array}}$$

Tale modello è non lineare e non può essere caratterizzato da una quadrupla di matrici. È dunque della forma più generale

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f\left(x(t), u(t)\right) \\ y(t) &= g\left(x(t), u(t)\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f\left(x(t), u(t)\right) &= \begin{bmatrix} f_1\left(x(t), u(t), t\right) \\ f_2\left(x(t), u(t), t\right) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x_2(t) \\ -\frac{k_1}{m}x_1(t) - \frac{k_2}{m}x_1^3(t) - \frac{\beta}{m}x_2(t) + \frac{u(t)}{m} \end{bmatrix} \\ g\left(x(t), u(t)\right) &= x_1(t) \end{aligned}$$

Pendolo semplice



$C_p(t) = m\,g\,\ell\,\mathrm{sen}\,\theta(t)$ (coppia dovuta alla forza peso)

$C_{\mathrm{tot}}(t) = C(t) - C_p(t)$

$J\,\ddot{\theta}(t) = C_{\mathrm{tot}}(t) \quad \text{con} \quad J = m\,\ell^2$

Ponendo $u(t) = C(t)$, $x_1(t) = \theta(t)$, $x_2(t) = \dot{\theta}(t)$:

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -\frac{g}{\ell}\,\mathrm{sen}\,x_1(t) + \frac{u(t)}{m\,\ell^2} \end{aligned}}$$

Modelli nello spazio degli stati: perché?

- Il modello matematico del sistema è, in generale, di più agevole determinazione.
- Consentono di rappresentare, oltre al comportamento ingresso–uscita, anche le caratteristiche interne del sistema.
- Se le variabili di stato sono misurabili, è possibile progettare un controllore con retroazione dello stato, che consente un controllo più completo del sistema.
- Sono alla base delle tecniche di *controllo ottimo*.
- I pacchetti di simulazione richiedono, in genere, modelli nello spazio degli stati (equazioni differenziali del primo ordine).
- A partire da tali modelli si determina univocamente la funzione di trasferimento, che è alla base delle tecniche di controllo classiche.

Stati di equilibrio e linearizzazione

Stato di equilibrio: in un sistema dinamico uno stato $\bar{x}$ è definito di *equilibrio* se esiste una funzione di ingresso $u(\cdot)$ tale che

$$\bar{x} = \phi(t, t_0, \bar{x}, u(\cdot)) \quad \forall t \in [t_0, t_1], \quad \forall t_0, t_1, \;\; t_1 > t_0.$$

Ciò implica che $x(t)$ sia costante e che quindi la sua derivata rispetto al tempo sia nulla: $\dot{x}(t) = 0$.

Di particolare interesse sono gli stati di equilibrio corrispondenti ad ingressi costanti $u(t) = \bar{u}$. Essi sono le soluzioni dell'equazione

$$\boxed{f(\bar{x}, \bar{u}) = 0} \tag{3}$$

Si può poi calcolare la corrispondente *uscita di equilibrio*: $\bar{y} = g(\bar{x}, \bar{u})$.

L'equazione (3) può avere una, nessuna o più soluzioni ed anche infinite soluzioni. Per i sistemi lineari diventa

$$A\,\bar{x} + B\,\bar{u} = 0.$$

Se $\bar{u} = 0$ gli stati di equilibrio sono uno ($\bar{x} = 0$) se $\det(A) \neq 0$ od infiniti se $\det(A) = 0$; se $\bar{u} \neq 0$ gli stati di equilibrio sono uno ($\bar{x} = -A^{-1}\,B\,\bar{u}$) se $\det(A) \neq 0$, nessuno od infiniti (caso particolare) se $\det(A) = 0$.

Moto di riferimento (o nominale): t_0, x_0 ed $u(\cdot)$ sono fissati

$$\bar{x}(t) = \phi(t, t_0, x_0, u(\cdot)).$$

Si ha:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}(t) &= f(\bar{x}(t), u(t)) \\ \bar{y}(t) &= g(\bar{x}(t), u(t)). \end{aligned}$$

Linearizzazione

L'analisi e il progetto di un sistema di controllo sono molto più semplici per i sistemi lineari $\Longrightarrow$ la **linearizzazione** è uno strumento che consente di trovare un modello lineare che approssima quello non lineare.

Si considerino una perturbazione sullo stato iniziale δx_0 ed una perturbazione sulla funzione di ingresso $\delta u(\cdot)$. Si ottengono il moto e l'uscita perturbati

$$\begin{aligned} x(t) &= \phi(t, t_0, x_0 + \delta x_0, u(\cdot) + \delta u(\cdot)) = \bar{x}(t) + \delta x(t) \\ y(t) &= \bar{y}(t) + \delta y(t). \end{aligned}$$

Si ha inoltre

$$\dot{x}(t) = f(\bar{x}(t) + \delta x(t), u(t) + \delta u(t)) = \dot{\bar{x}}(t) + \delta \dot{x}(t).$$

Sviluppando in serie di Taylor $\dot{x}(t)$ e $y(t)$ nell'intorno di $\bar{x}(t)$ e $u(t)$ con arresto ai termini del primo ordine

$$
\begin{aligned}
\dot{x}(t) &\approx f(\bar{x}(t), u(t)) + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\bar{x}(t),u(t)} \delta x(t) + \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{\bar{x}(t),u(t)} \delta u(t) \\
y(t) &\approx g(\bar{x}(t), u(t)) + \left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_{\bar{x}(t),u(t)} \delta x(t) + \left.\frac{\partial g}{\partial u}\right|_{\bar{x}(t),u(t)} \delta u(t).
\end{aligned}
$$

Il modello linearizzato è dunque del tipo

$$
\begin{aligned}
\delta\dot{x}(t) &= A(t)\,\delta x(t) + B(t)\,\delta u(t) \\
\delta y(t) &= C(t)\,\delta x(t) + D(t)\,\delta u(t).
\end{aligned}
$$

Se si linearizza nell'intorno di uno stato di equilibrio $\bar{x}$ corrispondente ad un ingresso costante $\bar{u}$:

$$
\boxed{
\begin{aligned}
\delta\dot{x}(t) &= A\,\delta x(t) + B\,\delta u(t) \\
\delta y(t) &= C\,\delta x(t) + D\,\delta u(t),
\end{aligned}
}
$$

dove $\delta x(t) = x(t) - \bar{x}$ e

$$
A = \left.\frac{\partial f(x,u)}{\partial x}\right|_{\bar{x},u} \quad B = \left.\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}\right|_{\bar{x},u} \quad C = \left.\frac{\partial g(x,u)}{\partial x}\right|_{\bar{x},u} \quad D = \left.\frac{\partial g(x,u)}{\partial u}\right|_{\bar{x},u}.
$$

Attenzione: il modello linearizzato rappresenta quello non lineare solo in un intorno dello stato di equilibrio (del moto di riferimento) considerato. L'approssimazione è dunque accettabile solo se le perturbazioni $\delta x_0, \delta u(t)$ e le corrispondenti variazioni $\delta x(t), \delta y(t)$ sono limitate in norma.

Esempio 1.

$$\dot{x}(t) = A\,x(t), \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

In questo caso $\det(A) = 0$. Gli stati di equilibrio devono soddisfare: $\begin{cases} x_1 - 2x_3 & = & 0 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 & = & 0 \\ x_2 - x_3 & = & 0 \end{cases}$

Esistono dunque infiniti stati di equilibrio del tipo: $\bar{x} = \begin{bmatrix} 2\alpha \\ \alpha \\ \alpha \end{bmatrix}, \quad \alpha \in \mathcal{R}$

Esempio 2.

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= 2x_1^2(t) - 3x_1(t)x_2(t)u(t)\\ \dot{x}_2(t) &= 2x_1(t)x_2(t) - 4x_2(t)u^2(t)\\ y(t) &= x_1(t)x_2^2(t) - 3x_1(t)u(t) + 2u^2(t).\end{aligned}$$

Quali sono gli stati di equilibrio corrispondenti all'ingresso costante $\bar{u} = 1$? E i relativi modelli linearizzati?

$$\bar{u} = 1 \Longrightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = 0 \Leftrightarrow x_1\left(2x_1 - 3x_2\right) = 0 \\ \dot{x}_2 = 0 \Leftrightarrow 2x_2\left(x_1 - 2\right) = 0 \end{cases} \Longrightarrow \quad \bar{x}' = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{x}'' = \begin{bmatrix} 2 \\ \frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

$$A' = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \qquad B' = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad C' = \begin{bmatrix} -3 & 0 \end{bmatrix} \qquad D' = 4$$

$$A'' = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ \frac{8}{3} & 0 \end{bmatrix} \qquad B'' = \begin{bmatrix} -8 \\ -16 \end{bmatrix} \qquad C'' = \begin{bmatrix} -\frac{11}{9} & \frac{16}{3} \end{bmatrix} \qquad D'' = -2$$

Esempio 3: sistema massa–molla–smorzatore con molla “hard”.

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\
\dot{x}_2(t) &= -\frac{k_1}{m}x_1(t) - \frac{k_2}{m}x_1^3(t) - \frac{\beta}{m}x_2(t) + \frac{u(t)}{m} \qquad k_1 > 0, k_2 > 0 \\
y(t) &= x_1(t).
\end{aligned}
$$

$\bar{u} = 0 \Rightarrow$ l’unico stato di equilibrio è quello ovvio: $\bar{x} = 0$.

$$
A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k_1}{m} & -\frac{\beta}{m} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}
$$

$\bar{u} \neq 0 \Rightarrow$ esiste un solo stato di equilibrio (unica soluz. reale equaz. terzo grado) del tipo $\bar{x} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

$$
A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k_1}{m} - \frac{3\,k_2}{m}\bar{x}_1^2 & -\frac{\beta}{m} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}
$$

Esempio 4: pendolo semplice.

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = -\frac{g}{\ell}\,\mathrm{sen}\,x_1(t) + \frac{u(t)}{m\,\ell^2}.$$

$$\bar{u} = 0 \implies \bar{x}' = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{x}'' = \begin{bmatrix} \pi \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{\ell} & 0 \end{bmatrix} \quad B' = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m\,\ell^2} \end{bmatrix} \qquad A'' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{\ell} & 0 \end{bmatrix} \quad B'' = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m\,\ell^2} \end{bmatrix}$$

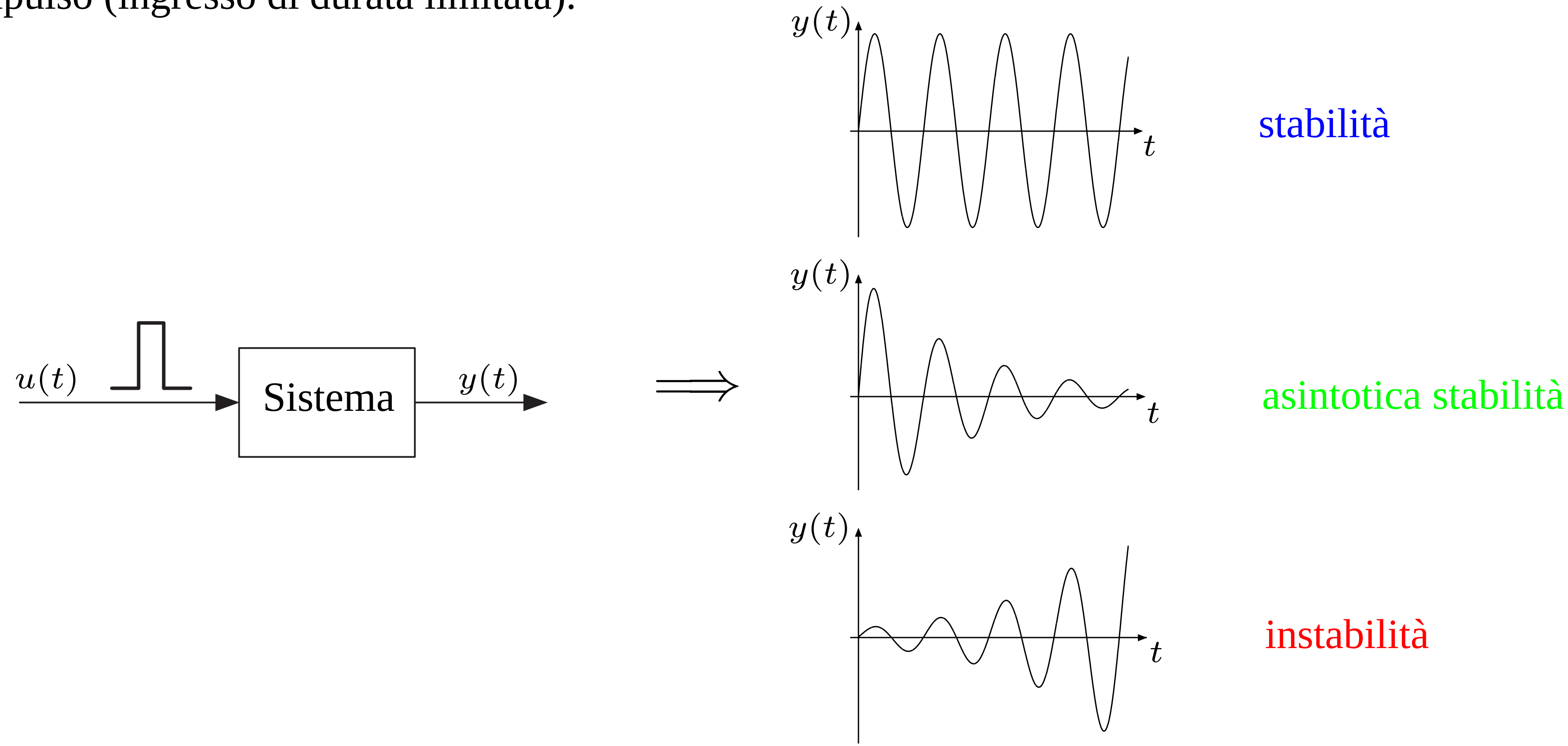
$$\bar{u} \neq 0 \implies \bar{x}' = \begin{bmatrix} \mathrm{arcsen}\left(\frac{\bar{u}}{m\,g\,\ell}\right) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{x}'' = \begin{bmatrix} \pi - \mathrm{arcsen}\left(\frac{\bar{u}}{m\,g\,\ell}\right) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Se si considera che il pendolo può compiere più giri, gli stati di equilibrio sono infiniti (aggiungere $2k\pi$ alle posizioni di equilibrio).

Stabilità

Con il termine *stabilità* si indica l'attitudine di un sistema dinamico a reagire con variazioni limitate del moto o della risposta a perturbazioni dello stato iniziale x_0 o della funzione di ingresso $u(\cdot)$.

Ad esempio, supponiamo di applicare ad un sistema che si trova in quiete (in uno stato di equilbrio) un impulso (ingresso di durata limitata).



In questo caso, in dipendenza del comportamento della risposta, si può parlare di *stabilità* (risposta limitata), *asintotica stabilità* (risposta convergente asintoticamente a zero), *instabilità* (risposta divergente).

Stabilità di un moto rispetto a perturbazioni dello stato iniziale.
Si considerino ora il moto di riferimento (nominale) $\bar{x}(t) = \phi(t, t_0, x_0, u(\cdot))$ e il moto perturbato $x(t) = \phi(t, t_0, x_0 + \delta x_0, u(\cdot))$. Il moto nominale $\bar{x}(t)$ si dice *stabile* rispetto a perturbazioni dello stato iniziale se

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \eta > 0 \quad \text{t.c.} \quad \|x(t) - \bar{x}(t)\| < \varepsilon, \quad t \geq t_0 \quad \forall\, \delta x_0 \quad \text{t.c.} \quad \|\delta x_0\| < \eta.$$

Se è soddisfatta anche la condizione

$$\lim_{t \to \infty} \|x(t) - \bar{x}(t)\| = 0, \quad \forall\, \delta x_0 \quad \text{t.c.} \quad \|\delta x_0\| < \eta$$

il moto nominale si dice *asintoticamente stabile*.

L'instabilità è definita come assenza delle condizioni di stabilità: il moto nominale si dice *instabile* se non è stabile.

Stabilità di uno stato di equilibrio.

Si considerino lo stato di equilibrio $\bar{x}$ e il moto perturbato $x(t) = \phi(t, t_0, \bar{x} + \delta\bar{x}, u(\cdot))$. Lo stato di equilibrio $\bar{x}$ si dice *stabile* rispetto a perturbazioni dello stato iniziale se

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \eta > 0 \quad \text{t.c.} \quad \|x(t) - \bar{x}\| < \varepsilon, \quad t \geq t_0 \quad \forall\, \delta\bar{x} \quad \text{t.c.} \quad \|\delta\bar{x}\| < \eta.$$

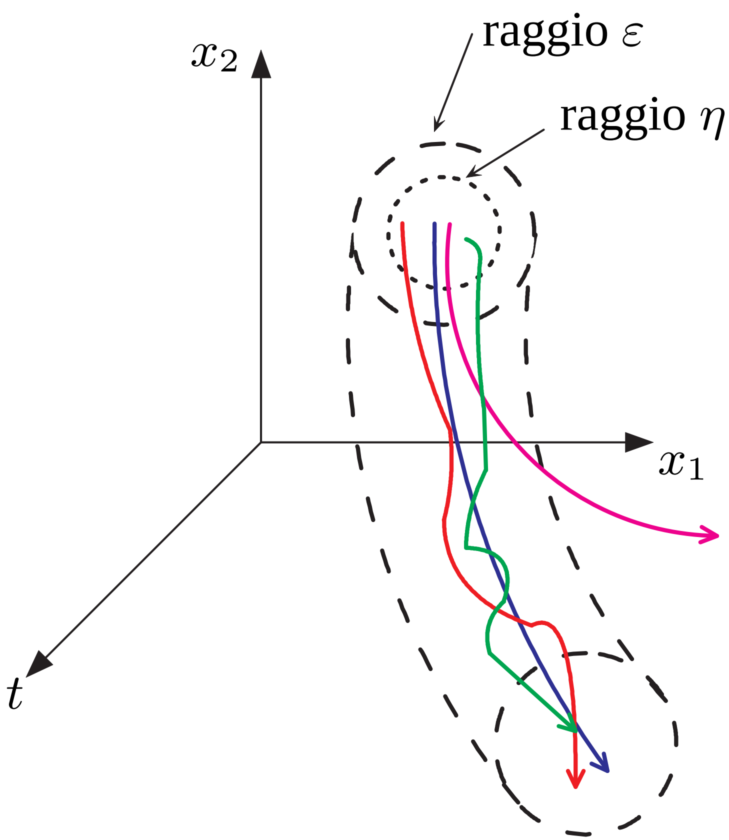
Se è soddisfatta anche la condizione

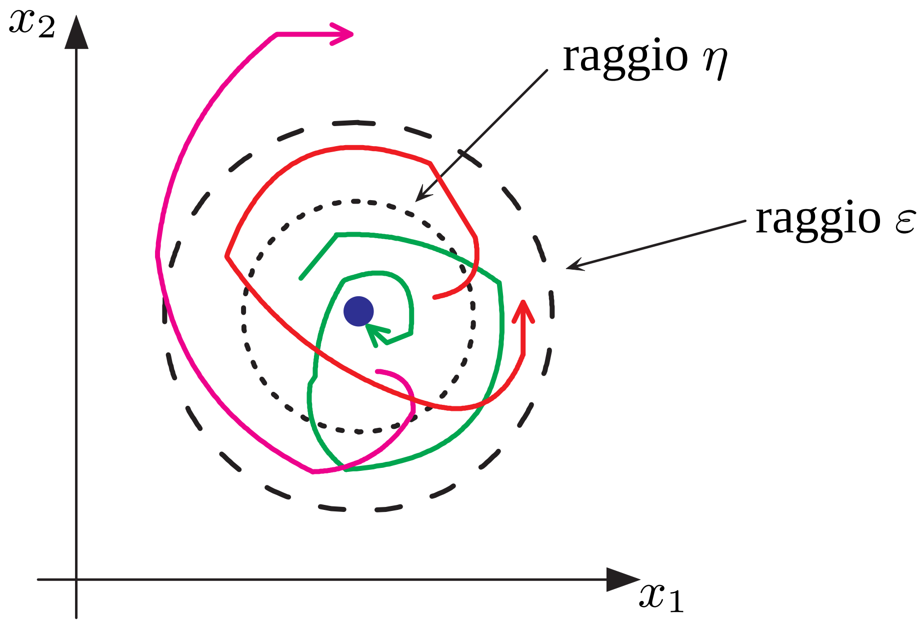
$$\lim_{t\to\infty} \|x(t) - \bar{x}\| = 0, \quad \forall\, \delta\bar{x} \quad \text{t.c.} \quad \|\delta\bar{x}\| < \eta$$

lo stato di equilibrio si dice *asintoticamente stabile*. Lo stato di equilibrio si dice *instabile* se non è stabile.

Le definizioni di stabilità di stabilità considerate si estendono banalmente alle risposte di riferimento ed alle uscite di equilibrio.

La stabilità di un moto (stato di equilibrio) rispetto a perturbazioni dello stato iniziale è detta *stabilità interna*.





Moto di riferimento:

— stabile

— asintoticamente stabile

— instabile

Stato di equilibrio:

— stabile

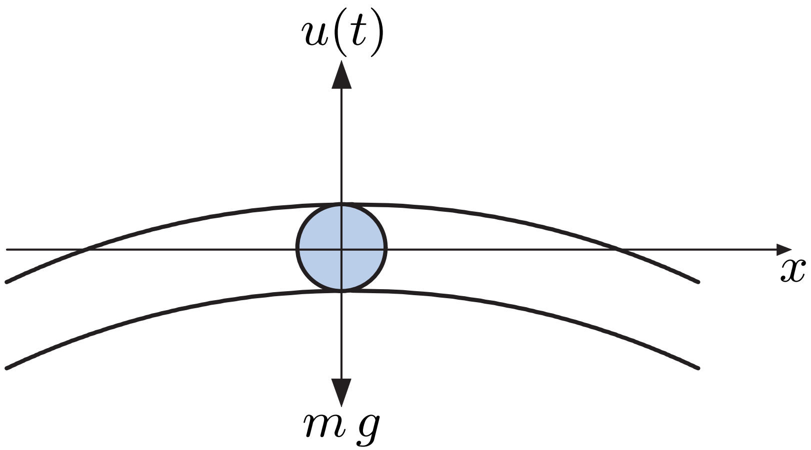
— asintoticamente stabile

— instabile

La stabilità non è, in generale, una proprietà del sistema ma dipende dal particolare moto nominale (stato di equilibrio) e dal particolare ingresso considerati. Per i sistemi lineari, come vedremo, grazie al principio di sovrapposizione degli effetti, si può invece parlare di stabilità del sistema.

Esempio.

Si consideri una pallina di massa m che scorre entro una guida parabolica. Ad essa è applicata una forza $u(t)$ diretta verticalmente.



Lo stato di equilibrio $x = 0$ è:

stabile	se $u(t) \geq m\,g$
instabile	se $u(t) < m\,g$

Stabilità di un moto rispetto a perturbazioni dell'ingresso.
Si considerino il moto di riferimento (nominale) $\bar{x}(t) = \phi(t, t_0, x_0, u(\cdot))$ e il moto perturbato $x(t) = \phi(t, t_0, x_0, u(\cdot) + \delta u(\cdot))$. Il moto nominale $\bar{x}(t)$ si dice *stabile* rispetto a perturbazioni della funzione di ingresso se

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \eta > 0 \quad \text{t.c.} \quad \|x(t) - \bar{x}(t)\| < \varepsilon, \quad t \geq t_0 \quad \forall\, \delta u(\cdot) \quad \text{t.c.} \quad \|\delta u(t)\| < \eta.$$

Stabilità di uno stato di equilibrio rispetto a perturbazioni dell'ingresso.
Si considerino lo stato di equilibrio $\bar{x}$ e il moto perturbato $x(t) = \phi(t, t_0, x_0, u(\cdot) + \delta u(\cdot))$.
Lo stato di equilibrio $\bar{x}$ si dice *stabile* rispetto a perturbazioni della funzione di ingresso se

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \eta > 0 \quad \text{t.c.} \quad \|x(t) - \bar{x}\| < \varepsilon, \quad t \geq t_0 \quad \forall\, \delta u(\cdot) \quad \text{t.c.} \quad \|\delta u(t)\| < \eta.$$

Anche in questo caso *l'instabilità* è definita come assenza delle condizioni di stabilità.

Le definizioni di stabilità considerate fono ad ora si riferiscono alla cosiddetta *stabilità in piccolo o locale*, cioè alla capacità del moto o della risposta di rispondere con variazioni limitate a perturbazioni dello stato iniziale o della funzione di ingresso.

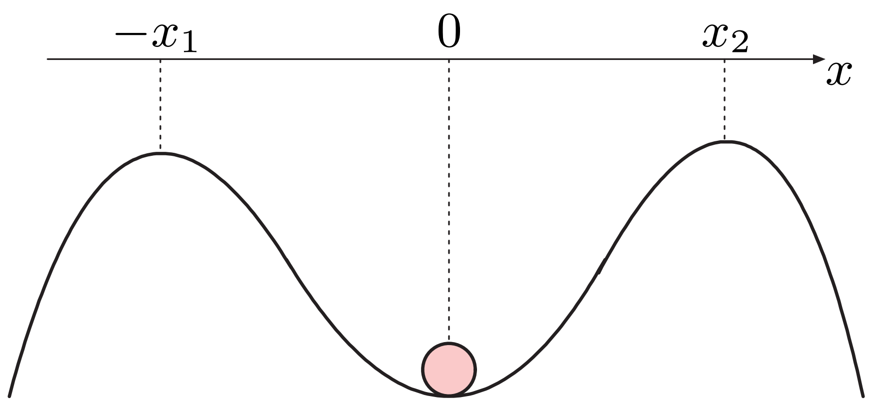
Quando si vuole dare una misura dell'entità delle perturbazioni cui corrisponde un comportamento stabile dei moti e delle traiettorie si parla invece di *stabilità in grande.*

Dominio di stabilità asintotica per un moto: se il moto di riferimento $\bar{x}(t) = \phi(t, t_0, x_0, u(\cdot))$ è asintoticamente stabile, esiste un insieme di stati iniziali $\mathcal{X}_0(t_0, x_0, u(\cdot))$ tale che

$$\lim_{t\to\infty} \|x(t) - \bar{x}(t)\| = 0, \quad \forall\, \delta x_0 \quad \text{t.c.} \quad x_0 + \delta x_0 \in \mathcal{X}_0.$$

L'insieme $\mathcal{X}_0$ è detto *dominio di stabilità asintotica* per il moto di riferimento considerato. La definizione relativa ad una risposta di riferimento è analoga.

Esempio: pallina che si muove in presenza di attrito viscoso.



Il dominio di stabilità asintotica per lo stato di equilibrio $x = 0$ è: $\quad -x_1 < x < x_2$

Stabilità asintotica globale di un moto: se $\mathcal{X}_0(t_0, x_0, u(\cdot))$ coincide con l'intero spazio degli stati il moto di riferimento $\bar{x}(t)$ si dice *globalmente asintoticamente stabile*. Se ciò avviene per ogni $u(\cdot)$, il sistema si dice globalmente asintoticamente stabile per $t \geq t_0$.

Stabilità i.l.s.l.: il moto di riferimento $\bar{x}(t)$ si dice *stabile ingresso limitato – stato limitato* (stabile i.l.s.l.) se esistono due numeri reali positivi M_u ed M_x, in generale funzioni di $t_0, x_0, u(\cdot)$, tali che

$$\|x(t) - \bar{x}(t)\| < M_x \quad t \geq t_0 \quad \forall\, \delta u(\cdot) \quad \text{t.c.} \quad \|\delta u(t)\| < M_u.$$

Stabilità i.l.u.l.: la risposta di riferimento $\bar{y}(t)$ si dice *stabile ingresso limitato – uscita limitata* (stabile i.l.u.l.) se esistono due numeri reali positivi M_u ed M_y, in generale funzioni di $t_0, x_0, u(\cdot)$, tali che

$$\|y(t) - \bar{y}(t)\| < M_y \quad t \geq t_0 \quad \forall\, \delta u(\cdot) \quad \text{t.c.} \quad \|\delta u(t)\| < M_u.$$

Simulazione

Simulazione: consiste nel “sostituire” il sistema reale con un suo modello matematico al fine di valutare le risposte a determinati ingressi (analisi). È di fondamentale importanza nei controlli automatici e nelle discipline ingegneristiche in generale.

Esperimento: processo di estrazione dei dati da un sistema applicando determinati ingressi (si agisce sugli ingressi accessibili e si osservano le uscite accessibili) $\Longrightarrow$ molto spesso non è possibile o non è vantaggioso effettuare l’esperimento sul sistema.

Modello: dato un sistema S ed un esperimento E un modello M è un “qualcosa” cui si può applicare E per ottenere informazioni su S.

Simulazione: esperimento eseguito sul modello.

A parte la sperimentazione diretta sul sistema, la simulazione rappresenta l’unica tecnica disponibile per analizzare il comportamento di un sistema arbitrario.

Nei corsi di controlli verrà utilizzato il software di simulazione MATLAB/Simulink.

Simulazione: perché?

- Il sistema fisico non è disponibile (per esempio non è ancora stato costruito).
- L'esperimento può essere pericoloso (es. indagare il comportamento del sistema in seguito ad un guasto).
- Il costo dell'esperimento è troppo elevato.
- Le costanti di tempo del sistema non sono compatibili con quelle dello sperimentatore (uomo) in quanto troppo veloci (es. esplosione) o troppo lente (es. movimento di una galassia).
- Disturbi, variabili interne e parametri del sistema possono non essere accessibili (es. non misurabili).
- I disturbi possono essere eliminati in modo da evidenziare particolari aspetti del comportamento del sistema.
- Eliminazione di effetti del secondo ordine (es. non linearità di alcuni componenti).

Attenzione: evitare estrapolazioni! Occorre ricordare che un modello matematico è sempre un'approssimazione del sistema reale.