

Controlli Automatici e Teoria dei Sistemi

Il Controllo Ottimo LQ

Prof. Roberto Guidorzi

Dipartimento di Elettronica, Informatica e Sistemistica

Università di Bologna

Viale del Risorgimento 2, 40136 Bologna



Avvertenza: Queste *slide* vengono fornite agli allievi solo come traccia delle lezioni svolte. Per un approfondimento si suggerisce il testo:



Marco Tibaldi - Progetto di sistemi di controllo, Pitagora, Bologna, 1995, ISBN 8837107625.



6.1 Il controllo ottimo LQ a tempo finito per i sistemi stazionari continui

Si considera il sistema

$$\dot{x}(t) = A x(t) + B u(t) \quad (1)$$

ove $x \in \mathcal{R}^n$, $u \in \mathcal{R}^r$ e la coppia (A, B) è stabilizzabile, con la condizione iniziale $x(0) = x_0$. Si considera poi il problema di controllare lo stato del sistema ad uno stato finale $x(t_f)$ molto prossimo a zero minimizzando la seguente funzione costo

$$J = \frac{1}{2} x(t_f)^T S_f x(t_f) + \frac{1}{2} \int_0^{t_f} (x(t)^T Q x(t) + u(t)^T R u(t)) dt \quad (2)$$

ove $S_f \geq 0$, $R > 0$, $Q > 0$. Si noti come il primo termine di J penalizzi la distanza da 0 dello stato finale, il termine $x(t)^T Q x(t)$ la distanza da zero dello stato all'istante t e l'ultimo termine la potenza di controllo.

Soluzione – Per la minimizzazione di J si definisce la funzione Hamiltoniana

$$H(t) = \frac{1}{2} (x(t)^T Q x(t) + u(t)^T R u(t)) + p^T(t) (A x(t) + B u(t)) . \quad (3)$$



Derivando parzialmente rispetto ad x si ottiene il sistema aggiunto

$$\dot{p}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x} = -A^T p(t) - Q x(t) \quad (4)$$

con la condizione finale

$$p(t_f) = S_f x(t_f) \quad (5)$$

mentre derivando rispetto ad u si ottiene la condizione di stazionarietà

$$\frac{\partial H}{\partial u} = B^T p(t) + R u(t) = 0. \quad (6)$$

Le (4) e (6) vengono dette *condizioni di Eulero–Lagrange*. Le equazioni differenziali (1) e (4) possono venire riunite in un unico modello differenziale che viene detto *sistema*

Hamiltoniano

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{p}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ p(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \quad (7)$$

$$0 = \begin{bmatrix} 0 & B^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ p(t) \end{bmatrix} + R u(t). \quad (8)$$



Le equazioni (7) e (8) descrivono un sistema non puramente dinamico ed il problema di controllo LQ originario è stato riportato al problema di mantenere nulla l'uscita del sistema Hamiltoniano agendo in maniera opportuna sul controllo $u(t)$. Essendo $R > 0$, dalla (6) si ricava

$$u(t) = -R^{-1}B^T p(t) \quad (9)$$

quindi il sistema Hamiltoniano può venire visto come il sistema libero

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{p}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ p(t) \end{bmatrix} \quad (10)$$

da risolvere con le condizioni $x(0) = x_0$ e $p(t_f) = S_f x(t_f)$. Dato che $x(t)$ e $p(t)$ sono funzioni lineari rispettivamente di $x(0)$ e $p(0)$, sono reciprocamente lineari per ogni t e si può scrivere

$$p(t) = S(t)x(t) \quad (11)$$

con la condizione $p(t_f) = S_f x(t_f)$. Derivando la (11) si ottiene

$$\dot{p}(t) = \dot{S}(t)x(t) + S(t)\dot{x}(t) = \dot{S}(t)x(t) + S(t)(Ax(t) - BR^{-1}B^T p(t)) . \quad (12)$$



D'altronde vale anche la relazione (4)

$$\dot{p}(t) = -A^T p(t) - Q x(t) \quad (13)$$

ed eguagliando i secondi membri delle (12) e (13) si ottiene la relazione

$$-\dot{S}(t) x(t) = A^T S(t) x(t) + S(t) A x(t) - S(t) B R^{-1} B^T S(t) x(t) + Q x(t) \quad (14)$$

che vale per ogni $x(t)$; si ottiene così l'equazione (differenziale) di Riccati

$$-\dot{S}(t) = A^T S(t) + S(t) A - S(t) B R^{-1} B^T S(t) + Q, \quad S(t_f) = S_f. \quad (15)$$

Risolvendo la (15) si ottiene $S(t)$ e, conseguentemente, l'ingresso

$$u(t) = -R^{-1} B^T S(t) x(t) \quad (16)$$

ossia la retroazione stato–ingresso $u(t) = -K(t) x(t)$ ove

$$K(t) = R^{-1} B^T S(t). \quad (17)$$



Calcolo del costo del controllo ottimo

Teorema – Il costo del controllo ottimo (16) che minimizza la funzione costo (2) partendo dallo stato iniziale x_0 è dato da

$$J(0) = \frac{1}{2} x_0^T S(0) x_0, \quad (18)$$

quello relativo all'intervallo $[t, t_f]$ da

$$J(t) = \frac{1}{2} x(t)^T S(t) x(t). \quad (19)$$

Dimostrazione – Si consideri il sistema non stazionario

$$\dot{x}(t) = A(t) x(t), \quad (20)$$

lo stato finale $x(t_f) = x_f$ e la forma quadratica funzione del tempo

$$x^T(t) M(t) x(t) \quad (21)$$

ove $M(t) \geq 0$. Si calcolerà ora la funzione costo

$$J(t_0) = x(t_f)^T S_f x(t_f) + \int_{t_0}^{t_f} x(t)^T M(t) x(t) dt, \quad S_f \geq 0. \quad (22)$$



Si consideri, a tale scopo, l'equazione differenziale di Lyapunov

$$-\dot{S}(t) = A^T(t)S(t) + S(t)A(t) + M(t), \quad S(t_f) = S_f; \quad (23)$$

la derivata rispetto a t della forma quadratica $x^T(t)S(t)x(t)$ è data da

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (x^T(t)S(t)x(t)) &= 2x^T(t)S(t)\dot{x}(t) + x^T(t)\dot{S}(t)x(t) \\ &= 2x^T(t)S(t)A(t)x(t) + x^T(t)(-A^T(t)S(t) - S(t)A(t) - M(t))x(t) \\ &= -x^T(t)M(t)x(t); \end{aligned} \quad (24)$$

ne segue

$$J(t_0) = x(t_f)^T S_f x(t_f) - x(t)^T S(t) x(t) \Big|_{t_0}^{t_f} = x_0^T S(t_0) x_0. \quad (25)$$

Ponendo ora

$$A(t) = A - BK(t) \quad (26)$$

$$M(t) = Q + K^T(t)B^T R B K(t) \quad (27)$$

con $K(t)$ data dalla (17), l'equazione differenziale di Lyapunov coincide con l'equazione differenziale di Riccati ed il costo relativo allo stato iniziale x_0 è dato dall'espressione (18).



Generalizzazione del problema di regolazione ottima LQ

Si considera il sistema

$$\dot{x}(t) = A x(t) + B u(t), \quad x(0) = x_0 \quad (28)$$

$$y(t) = C x(t) \quad (29)$$

e la funzione costo

$$J = \frac{1}{2} x(t_f)^T S_f x(t_f) + \frac{1}{2} \int_0^{t_f} (y(t)^T Q y(t) + u(t)^T R u(t)) dt \quad (30)$$

ove $S_f \geq 0$, $R > 0$, $Q > 0$. Tale formulazione si riconduce facilmente alla precedente osservando che

$$y(t)^T Q y(t) = x(t)^T C^T Q C x(t) \quad (31)$$

e che la condizione $Q > 0$ implica $C^T Q C \geq 0$. Si può quindi utilizzare la soluzione (16) ottenuta considerando una matrice $Q' = C^T Q C$.



Controllo ottimo a minima energia

Si considera il sistema (1) con $x(t_0) = x_0$, $x(t_f) = x_f$, $S_f = 0$, $Q = 0$ e $R = I_r$. La funzione costo diventa

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} u(t)^T u(t) dt. \quad (32)$$

La legge di controllo ottima è data, in questo caso, da

$$u(t) = B^T e^{A^T(t_f-t)} (W_c^2(t_f))^{-1} (x_f - e^{At_f} x_0) \quad (33)$$

ove $W_c^2(t_f)$ indica il Gramiano di raggiungibilità dato da

$$W_c^2(t_f) = \int_0^{t_f} e^{A(t-\tau)} B B^T e^{A^T(t-\tau)} d\tau. \quad (34)$$



6.2 L'equazione di Lyapunov per i sistemi continui

Tale equazione consente di calcolare l'integrale di una forma quadratica lungo la traiettoria associata al moto libero di un sistema dinamico lineare continuo in base allo stato iniziale del sistema.

Teorema – Dato il sistema lineare libero

$$\dot{x}(t) = A x(t), \quad x(0) = x_0 \quad (35)$$

supposto asintoticamente stabile e la matrice simmetrica $M \geq 0$, l'integrale

$$J = \int_0^{\infty} x^T(t) M x(t) dt \quad (36)$$

è dato da

$$J = x_0^T P x_0 \quad (37)$$

dove P è la soluzione dell'equazione algebrica di Lyapunov

$$A^T P + P A = -M . \quad (38)$$



Dimostrazione – Si definisca la funzione di x

$$V(x) := x^T P x ; \quad (39)$$

lungo una traiettoria del sistema (35) risulta

$$\dot{V}(x(t)) = \dot{x}^T(t) P x(t) + x^T(t) P \dot{x}(t) = x^T(t) A^T P x(t) + x^T(t) P A x(t) = -x^T(t) M x(t) \quad (40)$$

ove $-M = A^T P + P A$. Ne segue che

$$\int_0^\infty x^T(t) M x(t) dt = - \int_0^\infty \dot{V}(x(t)) dt = -V(x(t)) \Big|_0^\infty = x_0^T P x_0 . \quad (41)$$



6.3 Il controllo ottimo LQ a tempo infinito per i sistemi stazionari continui

Si considera il sistema

$$\dot{x}(t) = A x(t) + B u(t) \quad (42)$$

ove $x \in \mathcal{R}^n$, $u \in \mathcal{R}^r$ e la coppia (A, B) è stabilizzabile, con la condizione iniziale $x(0) = x_0$. Si considera poi il problema di controllare lo stato del sistema allo stato finale zero minimizzando la seguente funzione costo

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (x(t)^T Q x(t) + u(t)^T R u(t)) dt \quad (43)$$

ove $R > 0$, $Q > 0$.

Soluzione – Si consideri l'equazione algebrica di Riccati

$$0 = A^T S + S A - S B R^{-1} B^T S + Q \quad (44)$$

che può venire risolta utilizzando l'equazione alle differenze di Riccati



$$S(k) = A^T S(k+1)A - A^T S(k+1)B (R + B^T S(k+1)B)^{-1} B^T S(k+1)A + Q \quad (45)$$

con $S(t_f) = I_n$; la soluzione della (44) è data da

$$S = \lim_{k \rightarrow -\infty} S(k). \quad (46)$$

La legge di controllo cercata è

$$u(t) = -Kx(t) \quad (47)$$

con

$$K = R^{-1} B^T S. \quad (48)$$

Il costo del controllo, dall'istante t all'infinito è dato da

$$J(t) = \frac{1}{2} x^T(t) S x(t). \quad (49)$$



6.4 Il controllo ottimo LQ a tempo finito per i sistemi stazionari a tempo discreto

Si considera il sistema

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \quad (50)$$

ove $x \in \mathcal{R}^n$, $u \in \mathcal{R}^r$ e la coppia (A, B) è stabilizzabile, con la condizione iniziale $x(0) = x_0$. Si considera poi il problema di controllare lo stato del sistema ad uno stato finale $x(k_f)$ molto prossimo a zero minimizzando la seguente funzione costo

$$J = \frac{1}{2} x(k_f)^T S_f x(k_f) + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{k_f-1} (x(k)^T Q x(k) + u(k)^T R u(k)) \quad (51)$$

ove $S_f \geq 0$, $R \geq 0$, $Q \geq 0$. Si noti come il primo termine di J penalizzi la distanza da 0 dello stato finale, il termine $x(k)^T Q x(k)$ la distanza da zero dello stato all'istante k e l'ultimo termine la potenza di controllo.

Soluzione – Per la minimizzazione di J si definisce la funzione Hamiltoniana



$$H(k) = \frac{1}{2} (x(k)^T Q x(k) + u(k)^T R u(k)) + p^T(k+1) (A x(k) + B u(k)) . \quad (52)$$

Differenziando parzialmente rispetto ad x si ottiene il sistema aggiunto

$$p(k) = \frac{\partial H}{\partial x} = A^T p(k+1) + Q x(k) \quad (53)$$

con la condizione finale

$$p(k_f) = S_f x(k_f) \quad (54)$$

mentre differenziando rispetto ad u si ottiene la condizione di stazionarietà

$$\frac{\partial H}{\partial u} = B^T p(k+1) + R u(k) = 0 . \quad (55)$$

Le equazioni alle differenze (50) e (53) possono venire riunite in un unico modello che viene detto *sistema Hamiltoniano*

$$\begin{bmatrix} x(k+1) \\ p(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -A^{-T}Q & A^{-T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ p(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u(k) \quad (56)$$



$$0 = \begin{bmatrix} -B^T A^{-T} Q & B^T A^{-T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ p(k) \end{bmatrix} + R u(k). \quad (57)$$

Le equazioni (56) e (57) descrivono un sistema non puramente dinamico ed il problema di controllo LQ originario è stato riportato al problema di mantenere nulla l'uscita del sistema Hamiltoniano agendo in maniera opportuna sul controllo $u(k)$. Ipotizzando che sia $p(k) = S(k)x(k)$, dalla (55) si ottiene

$$R u(k) = -B^T S(k+1) (A x(k) + B u(k)) \quad (58)$$

dalla quale segue

$$(R + B^T S(k+1)B) u(k) = -B^T S(k+1)A x(k) \quad (59)$$

quindi

$$u(k) = - (R + B^T S(k+1)B)^{-1} B^T S(k+1)A x(k). \quad (60)$$

Dalla (53) poi si deduce la relazione

$$S(k) x(k) = A^T S(k+1) (A x(k) + B u(k)) + Q x(k) \quad (61)$$



e, sostituendo ad $u(k)$ l'espressione (60), si ottiene

$$S(k) x(k) = A^T S(k+1) A x(k) - A^T S(k+1) B (R + B^T S(k+1) B)^{-1} B^T S(k+1) A x(k) + Q x(k) \quad (62)$$

Essendo la (62) valida per ogni $x(k)$ ne segue l'equazione alle differenze di Riccati

$$S(k) = A^T S(k+1) A - A^T S(k+1) B (R + B^T S(k+1) B)^{-1} B^T S(k+1) A + Q \quad (63)$$

con la condizione $S(k_f) = S_f$. Determinata $S(k)$ dalla (63), si ricava il valore del controllo all'istante k

$$u(k) = - (R + B^T S(k+1) B)^{-1} B^T S(k+1) A x(k) \quad (64)$$

ossia la matrice di retroazione stato–ingresso

$$K(k) = (R + B^T S(k+1) B)^{-1} B^T S(k+1) A. \quad (65)$$



Calcolo del costo del controllo ottimo

Teorema – Il costo del controllo ottimo (64) che minimizza la funzione costo (51) partendo dallo stato iniziale x_0 è dato da

$$J(x_0) = \frac{1}{2} x_0^T S(0) x_0 . \quad (66)$$

Dimostrazione – Si consideri il sistema non stazionario

$$x(k+1) = A(k) x(k) , \quad (67)$$

lo stato finale $x(k_f) = x_f$ e la forma quadratica funzione del tempo

$$x^T(k) M(k) x(k) \quad (68)$$

ove $M(k) \geq 0$. Si calcolerà ora la funzione costo

$$J(0) = x(k_f)^T S_f x(k_f) + \sum_{k=0}^{k_f} x(k)^T M(k) x(k) , \quad S(k_f) = S_f \quad (69)$$

introducendo l'equazione alle differenze di Lyapunov

$$S(k) = A^T(k) S(k+1) A(k) + M(k) , \quad S(k_f) = S_f \quad (70)$$



e calcolando la quantità

$$\begin{aligned}\Delta S(k) &= x^T(k+1)S(k+1)x(k+1) - x^T(k)S(k)x(k) \\ &= x^T(k)A^T(k)S(k+1)A(k)x(k) - x^T(k)(A^T(k)S(k+1)A(k) + M(k))x(k) \\ &= -x^T(k)M(k)x(k).\end{aligned}\tag{71}$$

Ne segue che

$$\begin{aligned}J(k_f) &= x(k_f)^T S_f x(k_f) + \sum_{k=0}^{k_f-1} x(k)^T M(k) x(k) \\ &= x(k_f)^T S_f x(k_f) - x(k)^T S(k) x(k) \Big|_0^{k_f} = x_0^T S(0) x_0 = x(0)^T S(0) x(0).\end{aligned}\tag{72}$$

Ponendo poi

$$A(k) = A - BK(k)\tag{73}$$

$$M(k) = Q + K^T(k)B^T R BK(k)\tag{74}$$

ed utilizzando l'espressione (65) di $K(k)$, si ottiene infine il costo del controllo, dato dall'espressione (66).



6.5 Le equazioni di Lyapunov per i sistemi a tempo discreto

Tali equazioni consentono di calcolare la sommatoria di una forma quadratica lungo la traiettoria associata al moto libero di un sistema dinamico lineare a tempo discreto, in base allo stato iniziale del sistema.

Teorema – Dato il sistema lineare libero

$$x(k+1) = A_d x(k), \quad x(0) = x_0 \quad (75)$$

supposto asintoticamente stabile e la matrice simmetrica $M \geq 0$, la sommatoria

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} x^T(k) M x(k) \quad (76)$$

è data da

$$J = x_0^T P x_0 \quad (77)$$

dove P è la soluzione dell'equazione algebrica discreta di Lyapunov

$$P = A_d^T P A_d + M . \quad (78)$$



Dimostrazione – Si definisca la funzione di x

$$V(x) := x^T P x ; \quad (79)$$

lungo una traiettoria del sistema (79) risulta

$$\begin{aligned} \Delta V(x(k)) &= x^T(k+1) P x(k+1) - x^T(k) P x(k) \\ &= x^T(k) A_d^T P A_d x(k) - x^T(k) P x(k) = -x^T(k) M x(k) \end{aligned} \quad (80)$$

ove $-M = A_d^T P A_d - P$. Ne segue che

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^T(k) M x(k) = - \sum_{k=0}^{\infty} \Delta V x(k) = -V(x(k)) \Big|_0^{\infty} = x_0^T P x_0 . \quad (81)$$



6.6 Il controllo ottimo LQ a tempo infinito per i sistemi stazionari a tempo discreto

Si considera il sistema

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \quad (82)$$

ove $x \in \mathcal{R}^n$, $u \in \mathcal{R}^r$ e la coppia (A, B) è stabilizzabile, con la condizione iniziale $x(0) = x_0$. Si considera poi il problema di controllare lo stato del sistema allo stato finale zero minimizzando la seguente funzione costo

$$J = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (x(k)^T Q x(k) + u(k)^T R u(k)) \quad (83)$$

ove $R > 0$, $Q \geq 0$.

Soluzione – Si consideri l'equazione algebrica discreta di Riccati

$$S = A^T S A - A^T S B (R + B^T S B)^{-1} B^T S A + Q \quad (84)$$

che può venire risolta utilizzando l'equazione alle differenze di Riccati (63)



con la condizione $S(k_f) = I_n$; si ottiene infatti

$$S = \lim_{k \rightarrow -\infty} S(k). \quad (85)$$

La legge di controllo cercata è

$$u(k) = -Kx(k) \quad (86)$$

con

$$K = (R + B^T S B)^{-1} B^T S A. \quad (87)$$

Il costo del controllo, dall'istante k all'infinito è dato da

$$J(k) = \frac{1}{2} x^T(k) S x(k). \quad (88)$$

